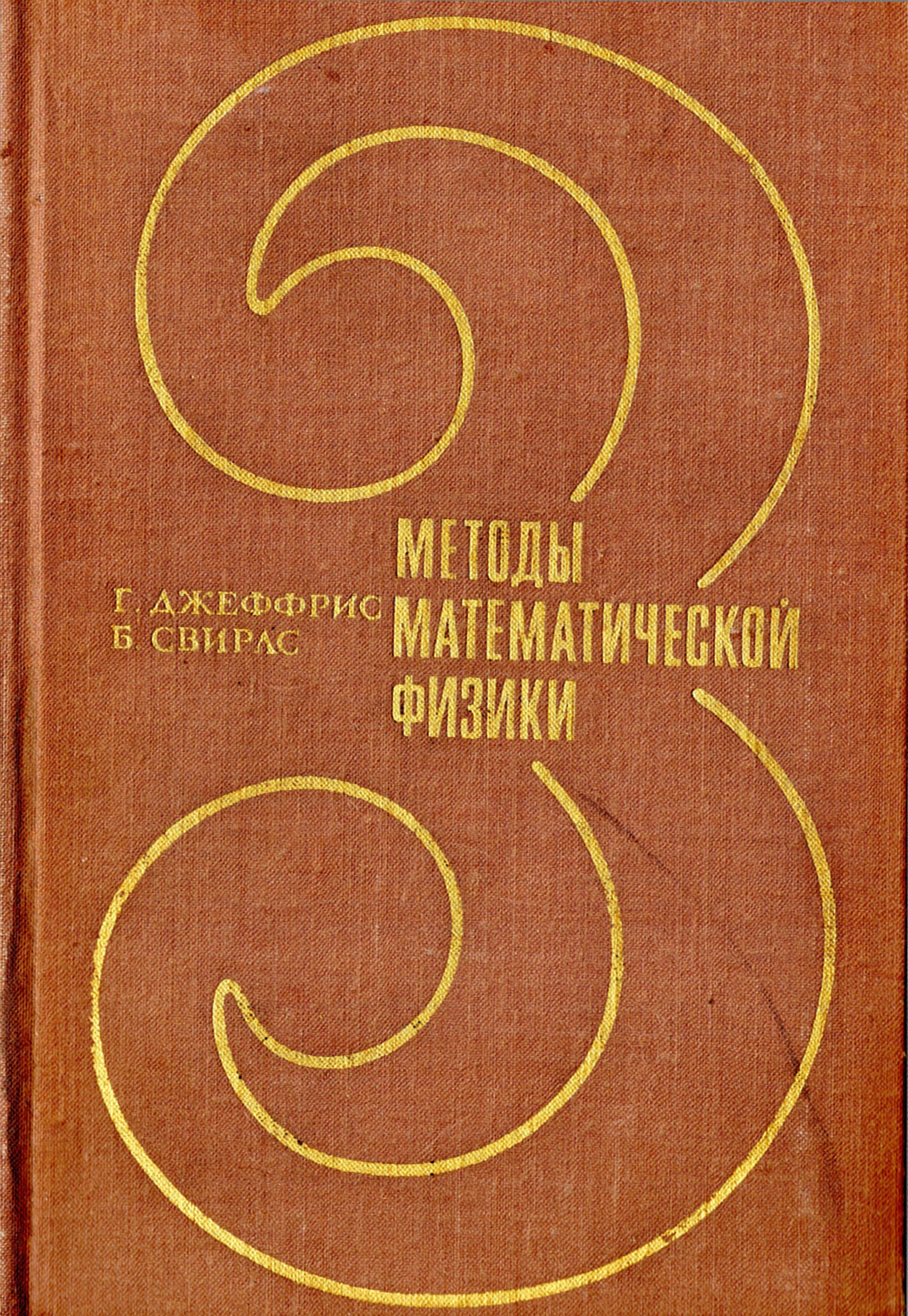
Г. ДЖЕФФРИС
Б. СВИРЛС
МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

METHODS
OF
MATHEMATICAL PHYSICS

by
SIR HAROLD JEFFREYS
M. A., D. Sc., F. R. S.
and
BERTHA SWIRLES (LADY JEFFREYS)
M. A., Ph. D.

Third Edition

CAMBRIDGE
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
1966

Г. ДЖЕФФРИС, Б. СВИРЛС

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВЫПУСК 3

Перевод с английского
под ред. В. Н. ЖАРКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1970

УДК 51 : 53 + 52

Фундаментальное руководство по прикладной математике, написанное известным геофизиком Г. Джеффрисом и его супругой Бертой Свирлс, представляет собой выдающееся явление в мировой литературе, с которым можно сравнить лишь такие труды, как «Методы математической физики» Куранта и Гильберта или «Методы теоретической физики» Морса и Фешбаха, выпущенные издательством «Мир» в русском переводе.

В третий, последний выпуск вошли главы 16—25, посвященные линейным дифференциальным уравнениям, теории потенциала, уравнению теплопроводности, волновому уравнению, а также бесселевым и другим специальным функциям и их приложениям.

Книга Г. Джеффриса и Б. Свирлс привлечет внимание физиков, геофизиков и астрономов, имеющих дело с той областью прикладной математики, где наряду с чисто рецептурной вычислительной техникой необходимо строгое понимание методов математической физики. Книга окажет также большую помощь аспирантам и студентам старших курсов.

Редакция космических исследований, астрономии и геофизики

2-3-1, 2-6-1
70

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В третий, последний выпуск вошли главы 16—25, посвященные линейным дифференциальным уравнениям, теории потенциала, уравнению теплопроводности, волновому уравнению, а также бесселевым и другим специальным функциям и их приложениям.

Гл. 16 перевел М. Л. Гервер, гл. 17, 18, 24—С. Я. Коган, гл. 19—А. Л. Левшин, гл. 20—23, 25 и замечания об обозначениях перевели Л. В. Никитин, А. А. Гвоздев и Б. В. Костров.

В. Н. Жарков

Глава 16

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Курчавый путь, кудрявый путь
он согнут колесом,
Однажды ночью в Бирмингем
неслись мы тем путем.

Г. К. Честертон. "Перелетный кабак" *)

16.01. Если дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты, то основные методы его решения следующие.

1. Прямое численное решение (гл. 9). Это часто стоит большого труда, но во многих случаях другого выхода нет.
2. Решение с помощью степенных рядов.
3. Решение путем подстановки определенных или контурных интегралов.
4. Асимптотические решения (гл. 17). Они могут быть получены несколькими методами. Часто непосредственное преобразование дифференциального уравнения дает решения в виде асимптотических рядов; кроме того, решение в виде определенного или контурного интеграла можно аппроксимировать методом наискорейшего спуска (метод перевала).

16.02. Особые точки дифференциального уравнения. Всякое линейное уравнение второго порядка можно записать так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

Если y и dy/dx заданы при $x = x_0$, то дифференциальное уравнение, вообще говоря, определяет значение d^2y/dx^2 при $x = x_0$. Продифференцировав наше уравнение, мы сможем найти d^3y/dx^3 при $x = x_0$, и т. д. Таким образом, мы будем получать один за другим члены ряда Тейлора для y, и если этот ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то решение существует. Если для любой пары значений y и dy/dx при $x = x_0$ d^2y/dx^2 тоже получает конечное значение, то x_0 называется *обыкновенной точкой* уравнения; в противном случае x_0 называется *особой точкой*. Например, пусть

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y,$$

*) Перевод Н. Чуковского.—*Прим. ред.*

и при $x=x_0$ $y=y_0$, $dy/dx=y_1$. Тогда решение

$$y=y_0\cos(x-x_0)+y_1\sin(x-x_0)$$

годится для любых x_0, y_0, y_1; следовательно, для этого уравнения все значения x—обыкновенные точки. Но уже для уравнения первого порядка

$$x\frac{dy}{dx}=y$$

нельзя выбрать значение y при $x=0$ произвольно; если придать y любое значение, не равное нулю, то dy/dx обратится в бесконечность и образовать ряд Тейлора не удастся. Точно так же, если дано

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

и y не равен нулю при $x=0$, то либо dy/dx, либо $d^2/y/dx^2$ бесконечна и образовать ряд Тейлора нельзя. Значение $x=0$ для двух уравнений является особой точкой.

Линейные уравнения обладают одним важным свойством: их особые точки постоянны. Даже для такого простого уравнения, как

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-y^2},$$

dy/dx обращается в бесконечность при $y=\pm1$, и значение x при этом *непостоянно*, если придавать разные значения y при $x=0$. Решение на самом деле таково:

$$y-\frac{1}{3}y^3=x+\alpha \quad \text{и} \quad y=1$$

$$\text{при} \quad x=\frac{2}{3}-\alpha=\frac{2}{3}-y(0)+\frac{1}{3}[y(0)]^3.$$

Именно это непостоянство особых точек порождает наибольшие дополнительные трудности в общей теории нелинейных дифференциальных уравнений.

16.03. Существование решения в окрестности обыкновенной точки. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+g(x)y=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$—аналитические функции от x (который мы можем для большей общности считать комплексным) в некоторой области, содержащей точку $x=0$. При $x=0$ положим $y=y_0$,

$dy/dx = y_1$. Чтобы их можно было выбрать произвольными, $f(x)$ и $g(x)$ должны быть ограничены в окрестности нуля. Положим по определению

$$Q\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Применим оператор Q к нашему дифференциальному уравнению (предполагая, что это возможно) и проинтегрируем второй член по частям. Получим

$$\frac{dy}{dx} - y_1 + yf(x) - y_0 f(0) - Q[yf'(x)] + Q[g(x)\,y] = 0, \tag{3}$$

что можно записать так:

$$\frac{dy}{dx} = y_1 + y_0 f(0) - yf(x) + Q[h(x)\,y]. \tag{4}$$

Проинтегрировав снова, получим

$$y = y_0 + y_1 x + y_0 f(0)\,x - Q[yf(x)] + Q^2[h(x)\,y]. \tag{5}$$

Положим

$$y_0 + y_1 x + y_0 f(0)\,x = u_1, \tag{6}$$

$$-Q[f(x)\,u_1] + Q^2[h(x)\,u_1] = u_2, \tag{7}$$

$$-Q[f(x)\,u_r] + Q^2[h(x)\,u_r] = u_{r+1} \tag{8}$$

и соединим отрезком точки 0 и x. Пусть на этом отрезке

$$|f(x)| < S, \quad |h(x)| < T, \quad |u_1| < C.$$

Если на таком отрезке $|\varphi(x)| < A|x|^r$, то на нем же

$$|Q\varphi(x)| < \int_0^{|x|} A|x|^r |dx| < \frac{A}{r+1}|x|^{r+1}; \tag{9}$$

кроме того, существует такое число U, что на всем отрезке $S + \frac{1}{2}T|x| < U$. Тогда

$$|u_2| = |-Q[f(x)\,u_1] + Q^2[h(x)\,u_1]| < CS|x| + \frac{1}{2!}CT|x|^2 < CU|x|, \tag{10}$$

$$|u_3| < C\left(\frac{1}{2}SU|x|^2 + \frac{1}{2\cdot 3}TU|x|^3\right) < \frac{1}{2!}CU^2|x|^2, \tag{11}$$

и вообще

$$|u_{r+1}| < \frac{1}{r!}CU^r|x|^r. \tag{12}$$

Следовательно, ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{13}$$

абсолютно сходится. И если эти неравенства выполняются при $|x| < R$ и $\arg x$, заключенном в некотором промежутке, то ряд, кроме того, равномерно сходится по M-признаку. Все его члены u_r по отдельности — аналитические функции x, поскольку функция u_1 аналитическая, и каждый следующий член есть по определению интеграл от аналитической функции. Но сумма равномерно сходящегося ряда из аналитических функций — тоже аналитическая функция; значит, этот ряд сходится к аналитической функции. Непосредственной подстановкой можно доказать, что она удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и условиям при $x = 0$.

Таким образом, доказано существование решения для прямолинейных путей интегрирования. По теореме Коши оно годится и для любого другого пути, если только этот путь можно непрерывно деформировать в прямолинейный отрезок так, что он ни разу не пройдет через особую точку подынтегральной функции. Но функции u_r могут иметь только те же особые точки, что и функции $f(x)$ и $g(x)$. Следовательно, решение аналитично на всей плоскости, кроме, быть может, особых точек уравнения.

Это по существу метод Пикара, намеченный еще раньше в одной неопубликованной работе Коши и в работе Каке, уже упоминавшейся в гл. 7*).

Для полученного решения можно искать последовательные аналитические продолжения, обходя при этом особые точки. Пусть, например, $x = 1$ — единственная особая точка. Тогда мы можем продвинуться от $x = 0$ к $x = 2 + i$, принять $2 + i$ за новое начало координат и определить значение y при $x = 2$, куда прямо из нуля мы добраться не могли. Однако при этом мы вовсе не обязательно получим такое же значение y, как двигаясь через точку $2 - i$. Вообще может быть так, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют полюса в какой-то точке и, следовательно, однозначны в ее окрестности, но y и его первую производную нельзя задать произвольно, и решения, вообще говоря, будут иметь точки ветвления.

16.04. Степенные ряды. Такое рассуждение доказывает существование решения. Получить решение в явном виде этим путем удается редко, хотя иногда его можно с пользой сочетать с численным интегрированием. Но он все-таки показывает, что решение выражается степенным рядом внутри круга, достигаю-

*) Историческую справку можно найти в [1].

щего ближайшей особой точки. Поскольку $f(x)$ и $g(x)$ тоже представимы в виде степенных рядов, сходящихся в этом же круге, мы можем все эти ряды прямо подставить в уравнение и приравнять коэффициенты. Тогда мы сможем найти постепенно все коэффициенты решения.

Возьмем, например, уравнение, решением которого является *интеграл Эйри*,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy, \tag{1}$$

и положим

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots .$$

Тогда после подстановки

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + r(r-1)a_rx^{r-2} + \ldots =$$
$$= a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_{r-3}x^{r-2} + \ldots,$$

откуда

$$a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3},\quad a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4},\ \ldots,\quad a_r = \frac{a_{r-3}}{r(r-1)}.$$

Итак,

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right). \tag{2}$$

Это, очевидно, целая функция, чего и следовало ожидать, так как уравнение не имеет особых точек.

Возьмем теперь *уравнение Лежандра*

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0. \tag{3}$$

Особые точки у него при $x = \pm 1$. Пусть

$$y = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r + \ldots .$$

Равенство постоянных и линейных членов дает

$$2\cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0,$$
$$3\cdot 2a_3 + (n+2)(n-1)a_1 = 0,$$

и вообще

$$(r+1)(r+2)a_{r+2} = -(n-r)(n+r+1)a_r. \tag{4}$$

Отсюда

$$y = a_0\left(1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3}{4!}x^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \ldots\right) +$$
$$+ a_1\left(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots\right). \tag{5}$$

Из (4) видно, что радиусы сходимости обоих рядов равны, вообще говоря, 1. Но если n — четное натуральное число, то ряд из четных степеней вырождается в многочлен, а если n — нечетное натуральное, то ряд из нечетных степеней обрывается и снова получается многочлен.

В любом случае второе решение по-прежнему является бесконечным рядом и должно иметь особенности при $|x| = 1$;

Если же n не целое, то не будет ни одного решения, аналитического одновременно в точках $+1$ и -1.

В обоих этих примерах получилось двучленное рекуррентное соотношение между коэффициентами. То же самое, к счастью, верно для многих дифференциальных уравнений физики, и поэтому их легко решать с помощью рядов. Если рекуррентное соотношение содержит три члена, то дело обстоит сложнее, а если четыре или больше, то практически удается получить в явном виде только несколько членов ряда.

16.05. Решение вблизи изолированной особой точки. Пусть в уравнении **16.03** (1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют особую точку при $x = 0$, но однозначны в некоторой ее окрестности S и не имеют в S других особых точек.

Пусть $x = a$ — обыкновенная точка в S. Тогда уравнение имеет два линейно независимых аналитических решения в окрестности точки a, и можно считать, что их разложения в ряд начинаются с 1 и $x - a$ соответственно; обозначим их $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$. Их можно аналитически продолжить на всю область S, кроме точки 0. Проследим такое продолжение вдоль замкнутого пути, выходящего из a, обходящего 0 и возвращающегося в a. Обозначим продолжения Y_1 и Y_2 через Z_1 и Z_2. Они, вообще говоря, не равны Y_1 и Y_2 при одном и том же x, так как точка 0 может быть их точкой ветвления. Но Z_1 и Z_2 суть решения нашего уравнения и, следовательно, должны линейно выражаться через Y_1 и Y_2; таким образом, для всех x из S

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2, \\ Z_2 &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрица a_{ik} невырожденная, так как если бы она была вырожденной, то существовала бы тождественно равная нулю линейная форма $\alpha Z_1 + \beta Z_2$, где α и β оба не равны нулю; продолжив эти решения назад, мы получили бы, что $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ тождественно равно нулю, что невозможно. Итак, a_{ik} имеет не равные нулю собственные значения λ_1, λ_2.

Сначала пусть они различны. Тогда найдутся две линейные комбинации Y_1 и Y_2, назовем их W_1 и W_2, такие, что их про-

должения равны $\lambda_1 W_1$ и $\lambda_2 W_2$. Но продолжение x^s есть $x^s e^{2\pi i s}$. Поэтому если s_1 и s_2 таковы, что

$$2\pi i s_1 = \ln \lambda_1, \quad 2\pi i s_2 = \ln \lambda_2, \tag{2}$$

то функции

$$x^{-s_1} W_1, \quad x^{-s_2} W_2 \tag{3}$$

однозначны в S. Следовательно, они разлагаются в ряды Лорана, сходящиеся в S, иными словами, и внутри круга с центром в нуле, доходящего до ближайшей особенности $f(x)$ или $g(x)$.

Если собственные значения матрицы a_{ik} равны, то ее можно привести к треугольному виду (но, вообще говоря, не к диагональному). Тогда найдется такое решение W_1, что его продолжение равно λW_1, а для любого другого решения W_2 продолжение будет иметь вид $\lambda W_2 + \mu W_1$. Тогда существует решение W_1, такое, что $x^{-s} W_1$ однозначно в S.

Что касается второго решения, то если

$$2\pi i s = \ln \lambda, \quad 2\pi i t = \frac{\mu}{\lambda}, \tag{4}$$

то $W_2 - W_1 t \ln x$ будет иметь продолжение $\lambda (W_2 - W_1 t \ln x)$, и, следовательно, вообще говоря, найдется второе решение, такое, что

$$x^{-s} (W_2 - W_1 t \ln x) \tag{5}$$

разлагается в ряд Лорана, сходящийся в той же области. Правда, W_2 может оказаться тождественно равным $W_1 t \ln x$. Нам могло, например, встретиться дифференциальное уравнение, решения которого были x и $x \ln x$. Но в любом случае решением служит одна из трех пар

$$\begin{gathered} x^{s_1} z_1, \quad x^{s_2} z_2; \quad x^s z_1, \quad x^s (z_2 - z_1 t \ln x); \\ x^s z_1, \quad x^s z_1 \ln x, \end{gathered} \tag{6}$$

где z_1 и z_2 однозначны и аналитичны в S, кроме, быть может, точки 0, и потому разлагаются в ряды Лорана, сходящиеся внутри круга с центром в нуле, достигающего ближайшей особенности $f(x)$ или $g(x)$. Третий случай можно рассматривать как частный случай второго при $z_2 = 0$, $t = -1$.

Может случиться, что даже при равных собственных значениях матрицы a_{ik} она приводится к диагональному виду. В этом случае $\mu = 0$ и существуют такие решения W_1, W_2, что $x^{-s} W_1$, $x^{-s} W_2$ однозначны в той же области.

Для этого рассуждения необходимо условие однозначности $f(x)$ и $g(x)$ в S, так как, если хоть одно из них не вернется к прежнему значению при обходе вокруг нуля, мы не получим соотношения (1).

Это рассуждение показывает, что решения указанных типов существуют в окрестности полюса или изолированной сущест-

венной особенности $f(x)$ или $g(x)$. При этом z_1 и z_2 сами могут иметь особенности при $x=0$, возможно, существенные, даже если $f(x)$ и $g(x)$ имеют в нуле всего лишь полюса. Последний вопрос в данном анализе остается открытым.

16.051. Регулярные особенности. Может случиться так, что ряды Лорана обеих функций z_1 и z_2 из **16.05** содержат лишь конечное число отрицательных степеней x; тогда каждая из этих функций имеет при $x=0$ полюс или обыкновенную точку. В таком случае эта особая точка называется *регулярной*. Тогда, поскольку изменение s_1, s_2 или s из **16.05** на целое число не меняет соответствующего λ, мы можем переписать решения в виде

$$y_1 = x^{s_1} z_1, \quad y_2 = x^{s_2} z_2 \tag{1}$$

или

$$y_1 = x^s z_1, \quad y_2 = x^{s+c} z_2 + t y_1 \ln x, \tag{2}$$

где z_1, z_2 должны быть теперь аналитическими и не равными нулю при $x=0$. В выражении (2) c должно быть целым.

Если в (1) $s_1 = s_2$, то из y_2 можно вычесть кратное y_1, чтобы сделать первый член разложения y_2 в ряд равным нулю. Остаток не будет тождественно равен нулю, поскольку y_2 не пропорционально y_1; решение будет линейно независимо от y_1 и разложение его в ряд будет теперь начинаться со степени, отличной от s_1. Итак, без потери общности можно считать $s_1 \neq s_2$. Точно так же в (2), если $c=0$, мы можем вычитать из y_2 кратное y_1, чтобы сделать равным нулю первый член в $x^s z_2$; значит, существует решение, в котором c — целое положительное. При этом z_2 может целиком исчезнуть, и мы будем иметь частный случай, при котором $y_2 = y_1 \ln x$. Итак, в (2) можно считать $c \neq 0$, если только $z_2 \neq 0$.

Если $f(x)$ или $g(x)$ имеет при $x=0$ изолированную особенность, не являющуюся точкой ветвления, то точка $x=0$ будет регулярной особенностью уравнения $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ тогда и только тогда, если $xf(x)$ и $x^2 g(x)$ аналитичны при $x=0$.

Докажем сначала необходимость этого условия. Поскольку $y = A_1 y_1 + A_2 y_2$ удовлетворяет уравнению при любых A_1, A_2, то должны выполняться равенства

$$f(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_1'' y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \quad g(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_1'' y_2'}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \tag{3}$$

и, кроме того, поскольку y_1 — решение, то

$$g(x) = -\frac{y_1'' + f(x) y_1'}{y_1}. \tag{4}$$

Из (1) мы находим прямой подстановкой

$$f(x) = -\frac{s_1 + s_2 - 1}{x} + O(1);$$
$$g(x) = \frac{s_1 s_2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5}$$

Из (2), если $c > 0$ или $z_2 = 0$,

$$f(x) = -\frac{2s - 1}{x} + O(1);$$
$$g(x) = \frac{s^2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{6}$$

Если же $c < 0$, то из (2)

$$f(x) = -\frac{2s + c - 1}{x} + O(1);$$
$$g(x) = \frac{s(s + c)}{x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{7}$$

Во всех случаях $f(x)$ и $g(x)$ логарифма не содержат. Необходимость условия доказана.

Теперь докажем его достаточность. Пусть $xf(x)$, $x^2 g(x)$ аналитичны при $x = 0$ и не имеют особенностей при

$$|x| \leqslant |x_0| = r_0.$$

Сделаем разрез от 0 до $-\infty \operatorname{sgn} x_0$. Тогда любой точки $x = re^{i\alpha}$ (r, α действительны), лежащей внутри круга $|x| = r_0$ и не на разрезе, можно достичь из x_0 по двум путям: по прямой от x_0 до $x_1 = r_0 e^{i\alpha}$, а затем по прямой от $r_0 e^{i\alpha}$ до x, или прямо по отрезку от x_0 до x; как доказано в **16.03,** мы получим одно и то же. Далее, y и dy/dx ограничены на окружности $|x| = r_0$. (Если $\arg x - \arg x_0 > \pi/2$, то можно пройти от x_0 до $x_0 e^{\pm \pi i/2}$ и затем до x по двум отрезкам прямых, на которых $r \geqslant r_0/\sqrt{2}$.) Положим по определению

$$Q\varphi(r) = \int_{r_0}^{r} \varphi(\rho)\, d\rho. \tag{8}$$

Поскольку $r < r_0$, это выражение отрицательно для положительного φ, но тогда $Q^2\varphi(r)$ положительно. Теперь, если $|f(x)| \leqslant A/r$, $|g(x)| \leqslant B/r^2$ при $r \leqslant r_0$, то можно применить метод из **16.03,** интегрируя от r_0 до r; модули членов ряда будут не больше, чем модули членов разложения в ряд решения уравнения

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{A}{r}\frac{dz}{dr} - \frac{B}{r^2} z = 0 \tag{9}$$

при условии, что при $x = x_1$, z и dz/dr равны соответственно y и $-|\partial y/\partial z|$. Но решением (9) служит

$$z = Cr^{t_1} + Dr^{t_2}, \tag{10}$$

где t_1, t_2 — корни уравнения

$$t(t-1) + At - B = 0. \tag{11}$$

Поскольку $B > 0$, t_1 и t_2 действительны и различны; значит, решение (9) непременно имеет вид (10), и если t_1 — меньший из корней, то $r^{-t_1}z$ ограничено *) при $0 < r \leqslant r_0$. Но $|z| \geqslant |y|$ и C, D, очевидно, ограничены, каким бы ни было α (включая разрез, с какой бы стороны мы к нему ни подходили). Следовательно, $x^{-t_1}y$ ограничено при $|x| < r_0$. Но тогда функции z_1, z_2 из (1), (2) не имеют существенных особенностей в нуле. Итак, наше дифференциальное уравнение имеет при $x = 0$ регулярную особенность. Если $y = Ax + Be^{1/x}$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{x^3(x+1)}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0,$$

причем $xf(x)$ и $x^2g(x)$ неаналитичны при $x = 0$.

Если $y = Ae^{1/x} + Be^{-1/x}$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^4} = 0,$$

в этом случае $xf(x)$ аналитично, а $x^2g(x)$ нет.

16.052. Особенности в бесконечности. Если в уравнении

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)y = 0 \tag{1}$$

мы положим $x = 1/\xi$, то получим

$$\xi^4\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left[2\xi^3 - \xi^2 f(x)\right]\frac{dy}{d\xi} + g(x)y = 0. \tag{2}$$

Назовем бесконечность обыкновенной точкой (1), если функции

$$\frac{2\xi - f(x)}{\xi^2} = 2x - x^2 f(x), \quad \frac{g(x)}{\xi^4} = x^4 g(x) \tag{3}$$

обе аналитичны при $\xi = 0$, т. е. при $x = \infty$. Она называется регулярной особой точкой, если они составляют соответственно $O(1/\xi) = O(x)$ и $O(1/\xi^2) = O(x^2)$.

Все точки, включая бесконечность, не могут одновременно быть обыкновенными для (1). Действительно, в таком случае $f(x)$

*) Разумеется, не аналитично; оно определено только на некотором отрезке, выходящем из точки 0.

и $g(x)$ должны быть аналитическими на всей плоскости, следовательно, целыми, и для больших $|x|$ должно быть

$$2x - x^2 f(x) = O(1), \quad x^4 g(x) = O(1).$$

Эти функции ограничены на всей плоскости, следовательно, они константы; назовем их a и b. Тогда

$$f(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2}{x}, \quad g(x) = \frac{b}{x^4}$$

и $x = 0$ не будет обыкновенной точкой уравнения (1) даже при $a = b = 0$.

Но может быть, например, так, что все точки, кроме ∞ и 0, для (1) обыкновенные, а 0 и ∞ — регулярные особенности. Тогда для малых $|x|$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

а для больших $|x|$

$$2x - x^2 f(x) = O(x), \quad x^4 g(x) = O(x^2).$$

Но тогда $xf(x)$ и $x^2 g(x)$ ограничены на всей плоскости и потому являются константами. Тогда (1) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2} y = 0$$

и решается в элементарных функциях.

16.06. Решение вблизи регулярной особенности. В формулах (1) и (2) в **16.051** функции z_1, z_2 аналитичны в окрестности нуля. Поэтому все функции, входящие в дифференциальное уравнение, выражаются сходящимися степенными рядами; тогда можно подставить y в виде ряда в уравнение и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, определить решение.

Перепишем наше дифференциальное уравнение в виде

$$Dy = x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (p_0 + p_1 x + \ldots) x \frac{dy}{dx} + (q_0 + q_1 x + \ldots) y = 0. \quad (1)$$

Положим

$$y = x^s (a_0 + a_1 x + \ldots) \quad (a_0 \neq 0) \quad (2)$$

и, приравняв коэффициенты при x^{s+r}, получим

$$[(s+r)(s+r-1) + p_0(s+r) + q_0]\, a_r = \\ = \text{Выражение, зависящее от } a_0 \ldots a_{r-1}. \quad (3)$$

В частности, при $r=0$, учитывая, что $a_0 \neq 0$, получаем

$$s(s-1)+p_0 s+q_0=0. \tag{4}$$

Это равенство называется *определяющим уравнением.*

Обозначим его корни s_1, s_2. Для каждого корня, если только коэффициент в (3) не обращается в нуль при $r>0$, мы можем найти по очереди все a_r, кроме a_0, который выбирается произвольно. Полученный ряд будет сходиться внутри круга, достигающего ближайшей особой точки уравнения, не считая точку $x=0$ *), и линейные комбинации этих двух решений дадут все множество решений. Исключением, очевидно, является случай $s_1=s_2$. Кроме того, может случиться неприятность, если разность корней — целое число; если они равны α и $\alpha-k$ $(k>0)$, то больший корень, как обычно, дает решение в виде ряда. Для меньшего же коэффициент при a_r в (3) обращается в нуль при $r=k$, и если выбрать $a_0 \neq 0$, то a_k и следующие члены обратятся, вообще говоря, в бесконечность. В таком случае ряд получается, если выбрать a_k конечным, а все предыдущие коэффициенты положить равными нулю. Но тогда ряд сводится к тому, что уже дал корень α, и тем самым мы нашли пока только одно решение.

Может случиться, правда, что при любом a_0 правая часть равенства для a_k тоже обращается в нуль. Тогда оно справедливо при любом a_k, и решение, начинающееся с $x^{\alpha-k}$, можно взять с любым коэффициентом независимо от коэффициента при решении, начинающемся с x^{α}.

В этом случае мы получаем два независимых решения в виде степенных рядов. Это соответствует тому случаю в **16.05**, когда матрица a_{ik} приводится к диагональному виду, хотя у нее равны собственные значения.

Остается исследовать, каково второе решение для тех случаев, когда в виде ряда можно найти только одно решение. Обозначим его

$$w(x)=x^{\alpha}(1+a_1 x+\ldots) \tag{5}$$

и положим

$$y=w(x)z. \tag{6}$$

Подставим (6) вместо y в (1) и, учитывая, что $w(x)$ — решение, получим

$$\frac{z''}{z'}=-\frac{2w'}{w}-\frac{p_0}{x}-p_1-p_2 x\ldots, \tag{7}$$

*) См. прямое доказательство в [2], стр. 193.

откуда

$$\ln z' = C - 2\ln w - p_0 \ln x - p_1 x - \tfrac{1}{2} p_2 x^2 - \ldots,$$

$$z' = \frac{A}{x^{p_0} w^2}\, \varphi(x), \tag{8}$$

$$z = A \int^x x^{-p_0} w^{-2} \varphi(x)\, dx,$$

где C, A произвольны, а $\varphi(x)$ аналитична и равна 1 при $x = 0$. Первый член в разложении $x^{-p_0} w^{-2}$ есть $x^{-p_0-2\alpha}$. Но если другой корень определяющего уравнения равен $\alpha - k$, то

$$2\alpha - k = -p_0 + 1, \tag{9}$$

откуда $-p_0 - 2\alpha = -k - 1$. Если k — не целое положительное и не нуль, то после интегрирования мы получим степенной ряд, начинающийся с x^{-k}. Если $k = 0$, то

$$z = A \int^x \frac{1}{x}(1 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots)\, dx =$$

$$= A\left(\ln x + r_1 x + \frac{1}{2} r^2 x^2 + \ldots\right) + \text{const} \tag{10}$$

и

$$y = \left[A\left(\ln x + r_1 x + \frac{1}{2} r_2 x^2 + \ldots\right) + B\right] w(x), \tag{11}$$

так что решение превращается в частный случай **16.051** (2) при $c > 0$, если только при этом не все $r_1, r_2, \ldots$ равны нулю; если же $r_1, r_2, \ldots$ равны нулю, то получается частный случай **16.051** (2) при $z_2 = 0$.

Если k — целое положительное, то

$$z = A \int^x x^{-k-1}(1 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots)\, dx =$$

$$= B + A\left[-\frac{1}{k x^k} - \frac{r_1}{(k-1) x^{k-1}} - \ldots + r_k \ln x + \ldots\right]. \tag{12}$$

Итак, второе решение содержит член $w(x) \ln x$, если только $r_k \neq 0$. Кроме этого члена, оно содержит степенной ряд, начинающийся с члена $x^{\alpha-k}$, где $\alpha - k$ — второй корень определяющего уравнения.

Тогда решение имеет вид **16.051** (2) при $y_1 = w(x)$ и $c = -k$, где $k > 0$.

Если определяющее уравнение имеет вид **16.051** (5), (6), (7), то надо брать пары s_1, s_2; s, s; $s, s + c$ соответственно. Итак,

между двумя способами решения можно установить следующие соответствия:

16.051 (1). Корни определяющего уравнения различны; если они отличаются на целое число, то вторым решением служит 16.06 (12), причем $r_k = 0$.

16.051 (2) при $c > 0$ или $z_2 = 0$. Корни определяющего уравнения равны. Одно решение содержит логарифм. Случай $z_2 = 0$ соответствует тому, что все $r_1, r_2, \ldots$ в 16.06 (11) равны нулю.

16.051 (2) при $c < 0$. Корни определяющего уравнения отличаются на целое число; вторым решением служит 16.06 (12), в котором $r_k \neq 0$. Одно решение содержит логарифм.

Обычно определяющее уравнение имеет действительные корни. Дело в том, что если $s = u + iv$, то

$$x^s = \exp[(u + iv)\ln x] = x^u[\cos(v \ln x) + i \sin(v \ln x)],$$

и из физических соображений чаще всего можно исключить сложное поведение последнего множителя вблизи точки $x = 0$.

Случай, когда корни определяющего уравнения разнятся на целое число, а решения не содержат логарифма, гораздо более важен, чем можно было бы ожидать, учитывая, что он требует двух совпадений (k — целое положительное и $r_k = 0$). Причина в том, что только в этом случае, а также если s_1, s_2 целые, решения дифференциального уравнения не имеют точки ветвления при $x = 0$.

16.07. Поскольку мы знаем тип второго решения, то его можно получить в явном виде любым из следующих двух методов. Можно записать

$$y = w(x)\ln x + \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^{a-k+r} \tag{13}$$

и, подставив в уравнение, найти коэффициенты, или можно применить *метод Фробениуса*.

Он заключается в том, чтобы подставить в дифференциальное уравнение вместо y ряд

$$y = x^s(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \tag{14}$$

и, как и прежде, приравнять все коэффициенты, *кроме коэффициентов при x в самой низкой степени.*

Тогда для любого s, такого, что $s + r$ ни при каком целом неотрицательном r не является корнем определяющего уравнения, все коэффициенты будут выражены через a_0 и s точно

так же, как и прежде. Но y теперь уже не удовлетворяет уравнению. Действительно,

$$Dy = [s(s-1) + p_0 s + q_0] x^s. \tag{15}$$

Теперь если корни определяющего уравнения различны и отличаются не на целое число, то при s, стремящемся к любому из них, коэффициент при x^s в (15) стремится к нулю и y стремится к решению дифференциального уравнения. Так мы снова получаем все те же решения.

Если оба корня равны α, то коэффициент при x^s равен $(s-\alpha)^2$. Тогда при $s \to \alpha$

$$Dy \to 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} Dy \to 0. \tag{16}$$

Но s не входит явно в D; следовательно,

$$D \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} Dy \to 0, \tag{17}$$

тогда и y и $\partial y/\partial s$ стремятся к решениям уравнения, и мы получаем два независимых решения.

Если корни равны α и $\alpha - k$, то коэффициент в (15) равен $(s-\alpha)(s-\alpha+k)$ и

$$Dy = (s-\alpha)(s-\alpha+k) x^s. \tag{18}$$

Если $s \to \alpha$, то y стремится к прежнему решению. Но $\partial/\partial s\,(Dy)$ не стремится к 0, к какому бы корню s ни стремилось. Тогда мы это можем исправить, предварительно умножив y на $s - \alpha + k$, и получим второе решение

$$\left\{\frac{\partial}{\partial s}[(s-\alpha+k)y]\right\}_{s=\alpha-k}. \tag{19}$$

Множитель $s-\alpha+k$ сокращается при $r \geqslant k$ с множителем в знаменателе, и мы, вообще говоря, получаем бесконечный ряд.

Может показаться, что тем же способом получается третье решение

$$\left\{\frac{\partial}{\partial s}[(s-\alpha)\,y]\right\}_{s=\alpha}.$$

Но ни в одном члене ряда для y знаменатель не стремится к нулю при $s \to \alpha$, и это выражение равно просто $[y]_{s=\alpha}$, т. е. мы получаем наше первое решение.

Несмотря на свою кажущуюся простоту, метод Фробениуса употребляется редко по следующей причине. Мы ищем, вообще

говоря, такие решения дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют каким-либо ограничениям, например однозначные и непрерывные в некоторой области или стремящиеся к нулю при $x \to \infty$. Решение, содержащее логарифм, обычно не удовлетворяет первому из двух названных условий, и поэтому нужно искать только решение с более высоким показателем степени, представляющее собой просто ряд.

С другой стороны, даже если оба решения — степенные ряды, они обычно стремятся к бесконечности вместе с x, и только некоторая их комбинация стремится при этом к нулю. Метод Фробениуса обычно прямо эту комбинацию не дает, и ее приходится искать другими методами, которые попутно позволяют найти коэффициенты. Опишем теперь такие методы для функций Бесселя и Лежандра и объединяющей их в качестве своих частных случаев гипергеометрической функции.

Положим в уравнении Лежандра $x = 1 + z$. Тогда

$$(2z + z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(1 + z)\frac{dy}{dz} - n(n+1)y = 0.$$

Определяющее уравнение имеет вид

$$2s(s-1) + 2s = 0,$$

и оба его корня равны нулю. Положим

$$y_c = z^c(1 + a_1 z + \ldots + a_r z^r + \ldots)$$

и приравняем коэффициенты по методу Фробениуса. Самая низкая степень z дает снова просто определяющее уравнение. Равенство коэффициентов при z^r дает

$$2(r+1+c)^2 a_{r+1} = [(r+c)(r+1+c) - n(n+1)]a_r = \\ = -(r+c-n)(r+c+n+1)a_r$$

и

$$y_c = z^c\left[1 - \frac{(c-n)(c+n+1)}{(c+1)^2}\frac{z}{2} + \right. \\ \left. + \frac{(c-n)(c-n+1)(c+n+1)(c+n+2)}{(c+1)^2(c+2)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \ldots\right].$$

При $c \to 0$ мы получаем решение

$$w(z) = 1 + \frac{n(n+1)}{1^2}\frac{z}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \ldots,$$

которое можно было найти и непосредственно. Его радиус сходимости равен 2. Обозначим это решение через $P_n(x)$. Если n целое, то ряд обрывается и, следовательно, кратен уже найденному в **16.04.**

В качестве другого решения можно взять предел $\partial y_c/\partial c$ при $c \to 0$. Получается

$$\frac{\partial}{\partial c} z^{c+r} = z^r \frac{\partial}{\partial c} [\exp(c \ln z)] \to z^r \ln z,$$

и потому разложение второго решения начинается так:

$$P_n(x) \ln z - \frac{(-n)(n+1)}{1^2}\left(\frac{1}{-n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{1}\right)\frac{z}{2} + \\ + \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2} \times \\ \times \left(\frac{1}{-n} + \frac{1}{-n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \ldots.$$

Если n — целое положительное, то обрывающийся ряд аналитичен также и при $x = -1$, но второе решение содержит $\ln(x+1)$. Можно показать, что оно представляется в виде

$$q_n(x) = \frac{1}{\pi} P_n(x) \ln \frac{x+1}{x-1} - f_{n-1}(x),$$

где f_{n-1} — это сумма членов с x в положительных и нулевой степенях в разложении $\frac{1}{\pi} P_n(x) \ln \frac{x+1}{x-1}$ по *убывающим* степеням x.

Впрочем, даже не получив точного вида второго решения, можно увидеть, что оно не имеет физического смысла в широком классе задач. Приложения этого уравнения связаны с задачами на сфере, в которых x есть синус широты. В таких случаях обычно заранее известно, что решение или его производная конечны на полюсах. Но если оба корня определяющего уравнения на полюсах равны нулю, то второе решение, очевидно, не удовлетворяет условию. Тогда единственным допустимым решением остается первое, и оно должно быть аналитично при $x = \pm 1$.

Других особых точек уравнение не имеет, и потому допустимое решение должно быть целой функцией. Следовательно, из решений, найденных в **16.04**, годится то, ряд которого обрывается, а другое — бесконечный ряд с радиусом сходимости 1 — не годится. Так мы сразу видим, какое решение годится. Даже в тех случаях, когда уравнение имеет другие особые точки, часто можно понять, какое решение имеет физический смысл, зная только определяющее уравнение и радиусы сходимости.

16.08. Трехчленные рекуррентные соотношения. Следующий пример, взятый из теории морских приливов, иллюстрирует эти рассуждения и в то же время демонстрирует способ

получать решение, когда рекуррентное соотношение содержит три коэффициента. При свободных симметричных колебаниях воды на поверхности вращающегося шара поднятие воды ζ в данной точке поверхности удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}\frac{d\zeta}{d\mu}\right)+\beta\zeta=0,$$

где μ — синус широты, β — положительная константа, зависящая от глубины, скорости вращения и радиуса, а f пропорционально частоте колебаний, которую и надо найти. ζ и $\frac{1}{f^2-\mu^2}\frac{d\zeta}{d\mu}$ должны быть конечны на всех широтах. Особыми точками уравнения являются $\mu=\pm 1$ и $\mu=\pm f$. Допустим, что ζ разложено по степеням $1-\mu$, начиная с $(1-\mu)^n$. Тогда первый член равен $\frac{2n^2}{f^2-1}(1-\mu)^{n-1}$, и определяющее уравнение $n^2=0$. Следовательно, вообще говоря, одно решение содержит $\ln(1-\mu)$ и не годится, так как у него $d\zeta/d\mu$ бесконечна на северном полюсе. Аналогично этому какое-то решение должно содержать $\ln(1-\mu)$ и тоже не годится, так как у него $d\zeta/d\mu$ бесконечна на южном полюсе. Итак, чтобы определить периоды, надо найти значения f, при которых существует решение, пригодное на обоих полюсах.

Легко показать, что если $f\neq 0$, то корни определяющего уравнения при $\mu=\pm f$ (т. е. при разложении по степеням $\mu\pm f$) равны 0 и 2; если $f=0$, то корни равны 0 и 3. Прямое исследование, правда, показывает, что второе решение при разложении по степеням $\mu-f$ не содержит логарифма, и поэтому оба решения аналитичны при $\mu=f$. Тогда, если мы разложим решение по степеням μ, оно должно быть аналитично во всех особых точках дифференциального уравнения и поэтому должно быть целой функцией. Следовательно, отношение коэффициентов последовательных членов стремится к нулю. Если бы оно стремилось к ± 1, мы бы сразу знали, что на полюсах оно расходится логарифмически. Строго говоря, даже нет необходимости исследовать точки $\mu=\pm f$. Действительно, если $|f|<1$ и решение не аналитично в какой-то из точек $\pm f$, то радиус сходимости его ряда (по степеням μ) был бы равен $|f|<1$, и, если бы мы каким-то образом узнали, что оба решения имеют радиусы сходимости $\geqslant 1$, отсюда бы сразу следовало, что они аналитичны при $\mu=\pm f$.

Лаплас и многие после него применяли в этом случае такой способ решения. Они полагали

$$\frac{1}{\mu^2-f^2}\frac{d\zeta}{d\mu}=a_0+a_1\mu+a_2\mu^2+\ldots, \qquad (1)$$

откуда после интегрирования

$$\zeta = A - f^2 a_0 \mu - \frac{1}{2} f^2 a_1 \mu^2 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r+1} (a_{r-2} - f^2 a_r) \mu^{r+1}, \tag{2}$$

а, кроме того

$$\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2} \frac{d\zeta}{d\mu} = - a_0 - a_1 \mu - \sum_{r=2}^{\infty} (a_r - a_{r-2}) \mu^r. \tag{3}$$

Отсюда

$$-a_1 - \sum_{r=2}^{\infty} r (a_r - a_{r-2}) \mu^{r-1} + \beta \Big[A - f^2 a_0 \mu - \frac{1}{2} f^2 a_1 \mu^2 + \\ + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r+1} (a_{r-2} - f^2 a_r) \mu^{r+1} \Big] = 0. \tag{4}$$

Приравняем коэффициенты; члены с μ^{r+1} при $r \geqslant 2$ дадут

$$-(r+2)(a_{r+2} - a_r) + \frac{\beta}{r+1} (a_{r-2} - f^2 a_r) = 0, \tag{5}$$

и если обозначить

$$\frac{a_{r+2}}{a_r} = N_r, \tag{6}$$

то

$$N_r = 1 - \frac{\beta f^2}{(r+1)(r+2)} + \frac{\beta}{(r+1)(r+2) N_{r-2}}. \tag{7}$$

Получилось трехчленное соотношение между коэффициентами. Если r большое, а N_{r-2} не убывает как r^{-2} (см. (7)), то N_r близко к 1; тогда N_{r+2} будет еще ближе к 1 и т. д. Следовательно, радиус сходимости ряда (1), а тогда и ряда (2), будет равен 1, чего мы должны избежать. Это может быть не так только в случае, если N_{r-2} стремится к нулю и имеет порядок r^{-2}; в этом случае решение — целая функция. Попутно доказана аналитичность при $\mu = \pm f$. Остается только выяснить, существует ли последовательность N_r, каждый член которой имеет порядок r^{-2}. Перепишем (7) в виде

$$N_{r-2} = - \frac{\dfrac{\beta}{(r+1)(r+2)}}{1 - \dfrac{\beta f^2}{(r+1)(r+2)} - N_r}, \tag{8}$$

откуда видно, что если N_r имеет нужный порядок, то и N_{r-2} тоже. Поэтому N_{r-2} представляется сходящейся непрерывной

дробью: тот факт, что ζ — целая функция, эквивалентен утверждению, что все N_r достаточно малы для того, чтобы непрерывные дроби, выражающие отношения последовательных коэффициентов, сходились.

Одно из решений — четная, другое — нечетная функция μ. Займемся четной. Равенство членов с μ^2 в (4) дает

$$-3(a_3 - a_1) - \frac{1}{2}\beta f^2 a_1 = 0, \tag{9}$$

откуда

$$N_1 = 1 - \frac{\beta f^2}{2 \cdot 3}. \tag{10}$$

Но, с другой стороны, из (8)

$$N_1 = -\cfrac{\cfrac{\beta}{4 \cdot 5}}{1 - \cfrac{\beta f^2}{4 \cdot 5} + \cfrac{\cfrac{\beta}{6 \cdot 7}}{1 - \cfrac{\beta f^2}{6 \cdot 7} + \cfrac{\cfrac{\beta}{8 \cdot 9}}{1 - \cfrac{\beta f^2}{8 \cdot 9} + \dots}}}. \tag{11}$$

Приравняв эти два выражения, мы получаем то, что хотели — уравнение для f^2. Решать его можно методом последовательных приближений: очередное приближенное значение f^2 подставляется в (11), причем дробь выписывается до тех пор, пока коэффициент при f^2 не станет достаточно мал; получается какое-то значение для N_1. Тогда из (10) по этому N_1 вычисляется следующее значение f^2 и все повторяется. Для проверки можно выписать дробь на один шаг дальше, и если результат совпадает с прежним с нужной точностью, то его можно считать верным.

16.09. Так обращаться с трехчленными рекуррентными соотношениями можно и не только в случае степенных рядов. Важным примером является *уравнение Матье*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (4a - 16q\cos 2x)\,y = 0, \tag{1}$$

где q действительно, а a выбрано в зависимости от q так, чтобы одно решение имело период 2π. Это уравнение впервые было рассмотрено при изучении колебаний эллиптической мембраны; оно появляется также при изучении колебаний воды в эллиптическом озере и может быть обобщено на случай колебаний в произвольной периодической структуре, например в кристалле. При описании движения Луны по способу Хилла и при движе-

нии маятника, точка закрепления которого вибрирует, тоже появляются периодические коэффициенты, но в этих случаях решения не обязательно имеют тот же период, что коэффициенты.

Все периодические решения уравнения Матье симметричны или антисимметричны относительно точек 0 и $\pi/2$, т. е. они обладают теми же свойствами периодичности, что $\cos x$, $\cos 2x$, $\sin x$, $\sin 2x$, к которым они приводятся при $q=0$ и $4\alpha=1$ или 4. Допустим, что они представимы сходящимися рядами Фурье. Пусть, например,

$$y = A_0 + \sum A_{2r} \cos 2rx. \tag{2}$$

Тогда

$$-\sum_{r=0}^{\infty} (2r)^2 A_{2r} \cos 2rx + 4\alpha \sum A_{2r} \cos 2rx - \\ - 8q \sum A_{2r} \cos (2r-2)\, x - 8q \sum A_{2r} \cos (2r+2)\, x = 0. \tag{3}$$

Приравняв коэффициенты, мы получаем при $r \geqslant 2$

$$2qA_{2r-2} + (r^2 - \alpha) A_{2r} + 2qA_{2r+2} = 0, \tag{4}$$

и если ввести

$$N_r = \frac{A_{2r+2}}{A_{2r}}, \tag{5}$$

то

$$2qN_r = -(r^2 - \alpha) - \frac{2q}{N_{r-1}}. \tag{6}$$

Отсюда если N_{r-1} не равно приблизительно $-2q/r^2$, то N_r будет большим, порядка r^2, и ряд будет расходиться, что противоречит нашему предположению. Поэтому перепишем (6) в виде

$$N_{r-1} = -\frac{1}{\frac{r^2-\alpha}{2q} + N_r} \tag{7}$$

и дальше будем действовать, как в **16.08.**

Из равенства свободных членов следует

$$\alpha A_0 - 2qA_2 = 0, \tag{8}$$

а из равенства членов с $\cos 2x$

$$4qA_0 + (1-\alpha) A_2 + 2qA_4 = 0. \tag{9}$$

Исключив A_0, мы получаем

$$\left(\frac{8q^2}{\alpha} + 1 - \alpha\right) A_2 + 2qA_4 = 0, \tag{10}$$

откуда

$$N_1 = \frac{A_4}{A_2} = -\frac{\frac{8q^2}{\alpha} + 1 - \alpha}{2q}. \tag{11}$$

Кроме того, из (7)

$$N_1 = -\cfrac{1}{\cfrac{4-\alpha}{2q} - \cfrac{1}{\cfrac{9-\alpha}{2q} - \cfrac{1}{\cfrac{16-\alpha}{2q} - \dots}}}. \qquad (12)$$

Приравнивая эти два выражения, мы получаем уравнение для нахождения α при заданном q. Тем же методом можно получить решения в виде рядов по $\cos(2r+1)x$, $\sin(2r+1)x$ и $\sin 2rx$ [3].

16.091. Трехчленное рекуррентное соотношение получается и при решении уравнений, которые возникают при решении уравнения Шредингера для иона молекулы водорода.

В сферических координатах оно разделяется (ср. **18.063**), и для Σ-состояния получаются уравнения

$$\frac{d}{d\nu}\left[(\nu^2-1)\frac{dX}{d\nu}\right] + [A + 2R\nu - p^2\nu^2]X = 0$$

и

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dY}{d\mu}\right] + [-A + p^2\mu^2]Y = 0,$$

где A, R и p — константы.

Этим уравнениям посвящена обширная литература. Читатель может обратиться к [4], где он найдет другие ссылки.

16.092. Бесконечные определители. При решении дифференциальных уравнений, особенно с периодическими коэффициентами, часто помогает метод изучения движения Луны, который был введен Хиллом и Брауном. Мы проиллюстрируем его на одном примере. Легкий стержень длины l стоит на опоре, а на верхнем конце находится масса m. Точка опоры стержня испытывает вертикальные колебания; ее смещение равно $a\cos nt$. Величина a/l очень мала, но an^2/g не обязательно мало, так что n^2 велико по сравнению с g/l *). Обозначив через θ угол отклонения стержня от оси, направленной вверх, мы легко получаем уравнение движения первого порядка по a

$$l\ddot{\theta} = (g - an^2\cos nt)\theta. \qquad (1)$$

Это уравнение типа Матье, но мы теперь не будем предполагать, что движение имеет период $2\pi/n$. Наоборот, пред-

*) g — ускорение силы тяжести. — *Прим. ред.*

положим, что

$$\theta = e^{i\gamma t} \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{imnt},$$

$$\ddot{\theta} = -\sum (\gamma + mn)^2 b_m e^{i(\gamma+mn)t}, \tag{2}$$

$$(g - an^2 \cos nt)\,\theta = e^{i\gamma t} \sum \left[g b_m - \tfrac{1}{2} an^2 (b_{m+1} + b_{m-1}) \right] e^{imnt}, \tag{3}$$

и мы удовлетворим (1), если потребуем, чтобы для всех целых m было

$$[(\gamma + mn)^2 l + g]\, b_m = \tfrac{1}{2} an^2 (b_{m+1} + b_{m-1}). \tag{4}$$

Теперь можно написать уравнение для γ:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2}an^2 & (\gamma-2n)^2 l + g & -\frac{1}{2}an^2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}an^2 & (\gamma-n)^2 l + g & -\frac{1}{2}an^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}an^2 & \gamma^2 l + g & -\frac{1}{2}an^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}an^2 & (\gamma+n)^2 l + g & -\frac{1}{2}an^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Подобный бесконечный определитель, конечно, не обязан сходиться (ср. [2, стр. 36, 407—410] и [5]), но часто это и не важно, потому что, даже если он не сходится, то можно умножить строчки и столбцы на такие числа, не равные нулю, что он станет сходиться; ни корни, ни метод решения при этом не изменяются. Очевидно, если γ — корень, то $\gamma + rn$ — тоже корень при любом целом r. Впрочем, это тоже не важно; при такой замене диагональный элемент с наименьшим коэффициентом при l просто сместится на место, где $m = -r$. Метод непрерывных дробей позволяет здесь найти решение; надо ввести $M_m = b_m/b_{m-1}$ при $m > 0$ и $N_m = b_m/b_{m+1}$ при $m < 0$.

В случае $n = 0$, как мы знаем, γ чисто мнимое. Посмотрим, может ли оно стать действительным при большом an^2/g; если станет, то система будет устойчива. Переход произойдет при $\gamma = 0$, и тогда, полагая по очереди $m = 0, 1, -1$, мы получим из (4)

$$b_0 = \tfrac{1}{2} \frac{an^2}{g} (b_1 + b_{-1}), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} (n^2 l + g)\, b_1 &= \tfrac{1}{2} an^2 (b_0 + b_2); \\ (n^2 l + g)\, b_{-1} &= \tfrac{1}{2} an^2 (b_0 + b_{-2}). \end{aligned} \tag{7}$$

Можно добиться, чтобы было $b_0 > b_1 > b_2 > \ldots$ и $b_0 > b_{-1} > b_{-2} > \ldots$, если l достаточно велико по сравнению с a; тогда, пренебрегая b_2 и b_{-2}, получим

$$\frac{1}{2} = \frac{2\left(\frac{1}{2} an^2\right)^2}{g(n^2 l + g)}, \tag{8}$$

т. е.

$$a^2 n^4 - 2gln^2 - 2g^2 = 0. \tag{9}$$

Положительное значение n^2 определяется равенством

$$a^2 n^2 = gl + \sqrt{g^2 l^2 + 2g^2 a^2} \approx 2gl, \tag{10}$$

так что наибольшая скорость точки опоры an равна скорости, приобретаемой при свободном падении с высоты l. Как мы и ожидали, an^2/g велико, и мы получаем

$$b_1 = b_{-1} \approx \frac{1}{2}\frac{a}{l} b_0, \quad b_2 = b_{-2} \approx \frac{1}{8}\frac{a}{l} b_1, \ldots . \tag{11}$$

Коэффициенты быстро убывают с ростом $|m|$. Таким образом, обращенный маятник можно сделать устойчивым, если точку его опоры привести в достаточно быстрое вертикальное колебательное движение с малой амплитудой.

16.10. Решение с помощью комплексных интегралов. Этот метод состоит в том, чтобы подставить в уравнение вместо y интеграл вида $\int T e^{xt}\, dt$, где T — некоторая функция комплексной переменной t, а пределы интегрирования фиксированы. Тогда, интегрируя по частям, можно получить дифференциальное уравнение для T. Возьмем, например, уравнение Бесселя

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 - n^2)\, y = 0. \tag{1}$$

Указанная подстановка дает

$$\int_A^B T\left[x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) + (x^2 - n^2)\right] e^{xt}\, dt = 0, \tag{2}$$

т. е.

$$\int_A^B T\,(x^2 t^2 + xt + x^2 - n^2)\, e^{xt}\, dt = 0. \tag{3}$$

Теперь нужно подобрать такое T, чтобы это равенство соблюдалось для всех x, хотя бы в некоторой области. Мы здесь

считаем, что x действительно и положительно. Проинтегрируем два раза по частям, используя

$$xe^{xt}\,dt = d(e^{xt}), \tag{4}$$

и получим

$$[e^{xt}(xt^2T - t^2T' - tT + xT - T')]_A^B + \\ + \int_A^B e^{xt}[(t^2+1)T'' + 3tT' + (1-n^2)T]\,dt = 0. \tag{5}$$

Это равенство выполняется, если: 1) интегральная часть исчезает, что справедливо, например, если функция T однозначна и путь интегрирования замкнут (т. е. $A = B$); A и B могут быть не равны, но находиться в бесконечности, причем действительные части их равны $-\infty$; кроме того, множители, содержащие T, должны расти не слишком быстро при $|t| \to \infty$, например как степень t; далее, 2) должно быть

$$(t^2+1)T'' + 3tT' + T = n^2T. \tag{6}$$

Положим

$$T = \frac{u}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{t^2-1}\,\frac{du}{dt}\right] = \frac{n^2u}{\sqrt{t^2+1}}, \tag{8}$$

и если

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = dv, \tag{9}$$

то получим

$$\frac{d^2u}{dv^2} = n^2u. \tag{10}$$

Тогда

$$v = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right), \tag{11}$$

$$u = \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\pm n}, \tag{12}$$

и y может быть равен

$$\int_A^B \frac{e^{xt}\,dt}{\sqrt{t^2+1}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^n}, \\ \int_A^B \frac{e^{xt}\,dt}{\sqrt{t^2+1}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^{-n}}, \tag{13}$$

где A и B находятся в бесконечности, в третьей и второй четвертях соответственно. Этому условию удовлетворяет, например, путь M из **12.126.**

Решение с помощью степенных рядов дает, исключая случай $n=0$ и вообще целого $n>0$, два решения:

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!},$$
$$J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}}{r!\,(-n+r)!}. \tag{14}$$

Они независимы, даже если n полуцелое, хотя корни определяющего уравнения и отличаются в этом случае на целое число. Мы сравним их с решениями в виде комплексных интегралов, разлагая по убывающим степеням t. У первого интеграла первый член равен

$$\int_M \frac{e^{xt}\,dt}{2^n t^{n+1}}=2\pi i\,\frac{x^n}{2^n n!}\ *),$$

а у второго, соответственно, $2\pi i\,\frac{x^{-n}}{2^n(-n)!}$. Оба интеграла разлагаются в ряды по возрастающим степеням x. Итак,

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{e^{xt}\,dt}{\sqrt{t^2+1}\,(t+\sqrt{t^2+1})^n}, \tag{15}$$

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{(t+\sqrt{t^2+1})^n}{\sqrt{t^2+1}}\,e^{xt}\,dt. \tag{16}$$

Следовательно, если $n\geqslant 0$ и $x>0$, то $J_n(x)\,H(x)$ представляется в операторном виде так **):

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}\,(p+\sqrt{p^2+1})^n}\,H(x). \tag{17}$$

Однако $J_{-n}(x)$ не представимо в операторном виде при $n>1$, так как разложение соответствующего оператора должно было бы начинаться с p^n, что не поддается истолкованию; если же мы применим интеграл Бромвича, то он получится расходящимся.

Чтобы заставить интегральное выражение для $J_{-n}(x)$ сходиться, приходится использовать модификацию пути интегрирования Бромвича, при которой $\mathrm{Re}\,(t)\to\infty$ на концах.

*) В оригинале множитель 2^n в обоих знаменателях и в следующей строчке пропущен. — *Прим. перев.*

) Первоначально это представление получено способом **21.01 (см. [6]).

Ван дер Поль [7] нашел много интересных применений подобному методу и, в частности, вывел (15) и (16). Он, правда, предполагал с самого начала, что искомая функция имеет изображение, определяемое уравнением

$$F(z) = \int_0^\infty zf(x)\,e^{-zx}\,dx,$$

которое не имеет смысла, если условия сходимости не выполняются. Оно имеет смысл при $f(x) = J_n(x)$, но не при $f(x) = J_{-n}(x)$, если $n > 1$. Кроме того, его способ дает написанное выше дифференциальное уравнение для T, и он находит оба решения; одно из них не представимо интегралом Бромвича, который, как он объявляет вначале, он использует. Далее он некстати использует термин „операторное решение". Метод, который он использует, не операторный, так как он определяет p как комплексную переменную, а не как оператор. Дело в том, что, несмотря на формальное сходство методов контурного интеграла и операторного, области, в которых они применимы, все же не совпадают, а только пересекаются, и один метод не всегда можно заменить другим. Чтобы придать смысл интегральному выражению для $J_{-n}(x)$, необходимо изменить путь интегрирования Бромвича на такой, у которого концы уходят в бесконечность между мнимой осью и отрицательным направлением действительной оси. Но в задачах на малые колебания такое изменение приведет к ошибке всегда, когда есть бесконечно много действительных периодов, стремящихся к нулю. На самом деле Ван дер Поль, вычисляя $J_{-n}(x)$, не располагал необходимыми средствами для того, чтобы поймать рыбу; она сама выпрыгнула из воды на берег к нему в руки.

Для комплексных x решения в виде рядов однозначны при $-\pi < \arg x \leqslant \pi$. При целом n можно не налагать ограничений на $\arg x$, но в гл. 21 мы увидим, что в этом случае $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ не независимы. Тем не менее нет нужды изменять комплексные интегралы так, что $\mathrm{Re}(xt) \to -\infty$ на обоих концах пути интегрирования. Можно обеспечить непрерывность тем, что заставить $\arg t$ непрерывно изменяться на концах вместе с $\arg x$, и при этом интегралы будут тождественно равны рядам.

Подынтегральные выражения имеют точки ветвления $t = \pm i$. Интеграл по любой петле, обходящей одну из них и уходящей в бесконечность так, что при этом $\mathrm{Re}(xt) \to -\infty$, является решением уравнения. Таким же способом получаются и два других важных решения — функции Ханкеля. Они, разумеется, зависели от $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$, которые, если понадобится, можно выразить через них (см. **21.02**).

16.11. Преобразование рядов в интегралы. Иногда ряд преобразуется в интеграл прямым применением формулы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{e^{rx}}{z^{r+1}}\,dz = \frac{x^r}{r!},$$

где для действительных положительных x надо брать путь интегрирования M пересекающим положительную часть действительной оси и с концами, уходящими в бесконечность в третьей и второй четвертях. Применение этого правила к ряду для $J_n(x)$ дает

$$\frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{e^{zx}}{z}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(n+2r)!}{r!\,(n+r)!}\frac{1}{(2z)^{n+2r}}\,dz; \tag{18}$$

это выражение должно быть тождественно равно (15); в примере 9 (стр. 41) дается прямой способ суммирования этого ряда. Можно поступить иначе, положив в операторной форме

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^n J_n(x)\,H(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2n+2r}}{r!\,(n+r)!} =$$

$$= \sum(-1)^r\frac{(2n+2r)!}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{1}{2p}\right)^{2n+2r}H(x). \tag{19}$$

Но мы знаем, что

$$z!\left(z-\frac{1}{2}\right)! = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\,(2z)!, \tag{20}$$

откуда

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^n J_n(x)\,H(x) = \sum(-1)^r\frac{(n+r-1/2)!}{\sqrt{\pi}\,r!}\left(\frac{1}{p}\right)^{2n+2r}H(x) =$$

$$= \frac{(n-1/2)!}{\sqrt{\pi}\,p^{2n}}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-(n+1/2)}H(x) =$$

$$= \frac{(n-1/2)!}{\sqrt{\pi}}\frac{p}{(p^2+1)^{n+1/2}}H(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{(n-1/2)!}{\sqrt{\pi}}\int_M \frac{e^{tx}}{(t^2+1)^{n+1/2}}\,dt. \tag{21}$$

В частности,

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^{1/2} J_{1/2}(x)\,H(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{p}{p^2+1}H(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}H(x).$$

Продолжая обе части, получаем

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{22}$$

Для вычисления $J_{-1/2}(x)$ этот способ не годится, так как $(n-{}^1/_2)!$ тогда бесконечно, и (21) принимает вид $\infty \times 0$. Однако, исследовав соответствующий ряд, можно убедиться, что

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{23}$$

16.12. Вронскиан. *Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — функции от x, определенные на каком-то промежутке и имеющие на нем $n-1$ производную. Определитель*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{1}$$

называется их вронскианом. Если существуют константы $A_1, \ldots, A_n$, не все равные нулю и такие, что $\sum_{r=1}^{n} A_r y_r = 0$ при всех значениях x из этого интервала, то при тех же значениях x вронскиан равен нулю. Это сразу станет видно, если продифференцировать равенство $n-1$ раз и исключить A_r из получающихся соотношений.

Обратно, если $W = 0$ тождественно на некотором интервале и минор, соответствующий хотя бы одному $y_r^{(n-1)}$, не обращается нигде на этом интервале в нуль, то найдутся такие константы A_r, не все равные нулю, что будет $\sum_{r=1}^{n} A_r y_r = 0$ тождественно на этом интервале. Пусть не обращается в нуль минор, соответствующий $y_n^{(n-1)}$. Тогда система из $n-1$ уравнения

$$\sum_{r=1}^{n-1} B_r y_r^{(s)} + y_n^{(s)} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-2) \tag{2}$$

при каждом фиксированном x определяет набор величин B_r. Поскольку $W = 0$, эти B_r удовлетворяют и аналогичному уравнению при $s = n-1$. Далее, функции $B_r(x)$ дифференцируемы, так как все $y_r^{(k)}$, $k \leqslant n-2$, дифференцируемы.

Продифференцировав каждое уравнение из (2) и вычтя следующее за ним уравнение, мы получим

$$\sum_{r=1}^{n-1} B_r' y_r^{(s)} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{3}$$

Поскольку определитель этой системы по условию нигде не равен нулю, все B_r' равны нулю тождественно.

Нельзя избавиться от условия, что вронскиан каких-то $n-1$ функций нигде не равен нулю. Это показывает следующий пример:

$$y_1 = 0 \ (-1 < x \leqslant 0), \quad y_1 = \exp(-1/x^2) \ (0 < x < 1),$$
$$y_2 = \exp(-1/x^2) \ (-1 < x < 0), \quad y_2 = 0 \ (0 \leqslant x < 1).$$

Здесь $y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$ тождественно на всем интервале $-1 < x < 1$, но нет таких констант A_1, A_2, чтобы на нём было всюду $A_1 y_1 + A_2 y_2 = 0$.

Если известно, что y_r аналитичны и есть область, в которой минор какого-то из $y_r^{(n-1)}$ не обращается в нуль, то линейная зависимость между $y_1, \ldots, y_n$, которая отсюда следует, может быть продолжена на всю ту область, где определены $y_1, \ldots, y_n$.

16.13. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть решения дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{r=1}^{n} f_{n-r}(x)\, y^{(n-r)} = 0, \tag{1}$$

никакая линейная комбинация которых не равна нулю, то производная их вронскиана, как легко заметить, получается из W заменой всех $y_r^{(n-1)}$ на $y_r^{(n)}$. Выразив $y_r^{(n)}$ из самого уравнения (1) и вычтя из последней строчки определителя остальные с подходящими коэффициентами, получаем

$$\frac{dW}{dx} = -f_{n-1}(x)\, W, \tag{2}$$

откуда

$$W = A \exp\left[-\int^{x} f_{n-1}(u)\, du\right], \tag{3}$$

где A — константа. Отсюда, если хотя бы при одном значении x $W \neq 0$, то W не обращается в нуль нигде. Если $f_{n-1}(x) = 0$, то W — константа. Для того случая, когда в уравнении второго порядка известно одно решение y_1, это дает легко разрешимое уравнение первого порядка для y_2 и эквивалентно элементарному способу решения путем подстановки $y = y_1 z$.

16.14. Метод вариации постоянных. Пусть наше уравнение имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)\, y = S, \tag{1}$$

и пусть для $S = 0$ нам известны два независимых решения y_1 и y_2. Тогда общий интеграл однородного уравнения имеет вид $Ay_1 + By_2$, где A, B — постоянные. Метод вариации постоянных

состоит в том, что A и B считают переменными, т. е. функциями от x, причем подбирают их так, чтобы удовлетворить уравнению при произвольном S. Итак, пусть

$$y = P(x)\, y_1 + Q(x)\, y_2; \tag{2}$$

тогда

$$y' = P'y_1 + Q'y_2 + Py_1' + Qy_2'. \tag{3}$$

Раз мы ввели две новые функции, мы вправе наложить на них одно ограничение: потребуем, чтобы было

$$P'y_1 + Q'y_2 = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$y'' = Py_1'' + Qy_2'' + P'y_1' + Q'y_2', \tag{5}$$

и, подставив это все в (1), мы получаем

$$\begin{aligned}[Py_1'' + f(x)\, Py_1' + g(x)\, Py_1] + \\ + [Qy_2'' + f(x)\, Qy_2' + g(x)\, Qy_2] + P'y_1' + Q'y_2' = S.\end{aligned} \tag{6}$$

Выражения, стоящие в скобках, равны нулю, так как y_1 и y_2 — решения (1) при $S = 0$. Тогда из (4) и (6) мы легко выражаем P' и Q':

$$\begin{aligned} P' &= \frac{Sy_2}{y_1'y_2 - y_2'y_1}, \\ Q' &= -\frac{Sy_1}{y_1'y_2 - y_2'y_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Знаменатель нигде не обращается в нуль, поскольку y_1 и y_2 независимы. Итак,

$$y = Cy_1 + Dy_2 + \int_a^x \frac{y_1(x)\, y_2(\xi) - y_2(x)\, y_1(\xi)}{y_1'(\xi)\, y_2(\xi) - y_2'(\xi)\, y_1(\xi)}\, S(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

где C и D — константы; a можно выбирать произвольно, его изменение лишь прибавляет к y линейную комбинацию $y_1(x)$ и $y_2(x)$, т. е. эквивалентно изменению C и D.

Легко проверить, что (8) удовлетворяет (1). Продифференцируем (8):

$$y' = Cy_1' + Dy_2' + \int_a^x \frac{y_1'(x)\, y_2(\xi) - y_2'(x)\, y_1(\xi)}{y_1'(\xi)\, y_2(\xi) - y_2'(\xi)\, y_1(\xi)}\, S(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

(так как подынтегральное выражение равно нулю при $\xi = x$); далее

$$y'' = Cy_1'' + Dy_2'' + \int_a^x \frac{y_1''(x)\,y_2(\xi) - y_2''(x)\,y_1(\xi)}{y_1'(\xi)\,y_2(\xi) - y_2'(\xi)\,y_1(\xi)} S(\xi)\,d\xi + S(x) \quad (10)$$

(в (9) подынтегральное выражение при $\xi = x$ равно $S(x)$). Подставив то и другое в (1), получаем тождество. Так как $y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$, константы C и D можно выбрать так, чтобы y и y' приняли при $x = a$ любые наперед заданные значения, и, следовательно, (8) — общее решение. В случае уравнения второго порядка, одно решение которого известно, решение этим методом обычно гораздо проще, чем с помощью подстановки $y = y_1u$.

Возьмем, например, уравнение

$$y'' + n^2y = S.$$

Здесь $y_1 = \cos nx$, $y_2 = \sin nx$. Тогда

$$y_1'y_2 - y_2'y_1 = -n,$$

$$y = -\frac{1}{n}\cos nx \int^x S(\xi)\sin n\xi\,d\xi - \frac{1}{n}\sin nx \int^x S(\xi)\cos n\xi\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^x S(\xi)\sin n(\xi - x)\,d\xi + A\cos nx + B\sin nx.$$

Легко проверить, что это общее решение.

Обобщение этого метода лежит в основе расчета движения планет. Если пренебречь влиянием других планет, то каждая планета движется по эллипсу, который определяется шестью числами, задающими положение и скорость планеты в какой-то момент времени. Чтобы учесть возмущения, эти числа надо представить переменными, т. е. каждому моменту времени ставится в соответствие свой мгновенный эллипс, по которому эта планета двигалась бы, если бы с этого момента влияние других планет вдруг исчезло бы, а осталось бы только солнечное притяжение. Возмущения все время медленно меняют этот эллипс, определяя тем самым истинное движение планеты.

Метод сохраняет силу и в том случае, если S — известная функция не только от x, но и содержит y. Тогда формула (8) все равно будет верной, хотя и не даст готового решения. Она превратится в *интегральное уравнение*, так как y будет стоять под знаком интеграла. Давайте рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\,y = h(x)\,y, \quad (11)$$

и пусть y_1 и y_2 — решения уравнения $y'' + g(x)\,y = 0$, такие, что $y_1'y_2 - y_2'y_1 = 1$. Тогда

$$y = A_1y_1 + A_2y_2 + \int_a^x [y_1(x)\,y_2(\xi) - y_2(x)\,y_1(\xi)]\,h(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = \\ = f(x) + \int_a^x K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi, \quad (12)$$

где

$$K(x, \xi) = [y_1(x)\,y_2(\xi) - y_2(x)\,y_1(\xi)]\,h(\xi). \quad (13)$$

Полученное уравнение можно решать методом итераций. Предположим, что $K(x, \xi)$ ограничено при $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$, $|K| < M$. При тех же x, ξ пусть $|f(x)| \leqslant N$. Подставим под знак интеграла в (12) $f(\xi)$ вместо $y(\xi)$. Тогда, обозначив этот интеграл через $f_1(x)$, получим

$$|f_1(x)| \leqslant MN(x - a). \quad (14)$$

Теперь подставим $f_1(x)$ под знак интеграла; новый интеграл $f_2(x)$ имеет

$$|f_2(x)| \leqslant M^2N\frac{(x-a)^2}{2!} \quad (15)$$

и так далее. Тогда

$$y = f(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots, \quad (16)$$

причем ряд абсолютно сходится: его члены соответственно меньше членов разложения $Ne^{M(x-a)}$. Подстановкой легко убедиться, что этот ряд есть решение. Этим методом можно на практике вычислять y, если известны y_1 и y_2 и $h(x)$ мало.

Если y_1, y_2, h аналитичны в какой-то ограниченной области, содержащей точку $x = a$, и для любого x из этой области имеется прямая, соединяющая a с x, то, интегрируя по ней, мы получим решение во всей этой области. Оно будет аналитично, так как представляет собой равномерно сходящийся ряд аналитических функций.

Этот метод годится и в том случае, если требуется, чтобы функция y имела заданные значения при двух фиксированных значениях x; для этого надо после каждого шага итерации переопределять A_1 и A_2 так, чтобы очередное приближение удовлетворяло этим условиям. Получается, вообще говоря, сходящийся ряд; при этом есть некоторая свобода выбора, в какой момент перейти к вычислениям. Правда, такое решение обычно более трудоемко, чем прямое численное решение с помощью конечных разностей.

16.15. Функция Грина. Этот метод тесно связан с предыдущим, однако он применим непосредственно к тем случаям, когда решение должно принимать в двух точках заданные значения. Он обобщается на случай двух и более измерений, но имеет слишком много модификаций, чтобы их здесь обсуждать. Указанный метод имеет большое теоретическое значение потому, что превращает дифференциальное уравнение с подходящими граничными условиями в интегральное. За изложением этого метода отсылаем читателя к [8, 9, 10]. Задачи, которые мы решали в **6.091—6.093** и **14.05**, были его частными случаями.

ПРИМЕРЫ

1, Найдите в виде ряда общее решение уравнения

$$y'' - xy' + 2y = 0.$$

Покажите, что одно решение есть многочлен, и выведите отсюда формулу для второго решения. (I. C., 1942.)

2. Пусть

$$y = \frac{\sin n\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta}, \quad x = \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Докажите, что

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (4n^2 - 1)\,y = 0,$$

а отсюда, что

$$y = 2n\left[x + \frac{4\,(1^2 - n^2)}{3!}\,x^3 + \frac{4^2\,(1^2 - n^2)\,(2^2 - n^2)}{5!}\,x^5 + \ldots\right]$$

и

$$\frac{\cos n\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 1 + \frac{1^2 - 4n^2}{2!}\,x^2 + \frac{(1^2 - 4n^2)\,(3^2 - 4n^2)}{4!}\,x^4 + \ldots.$$

Объясните, почему эти ряды имеют радиус сходимости 1, если $2n$ не целое.

3. Дано

$$(1 - x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - 6x^2\frac{dy}{dx} - 6xy = 0$$

и при $x = 0$ $y = 1$, $y' = 0$. Найдите y в виде ряда. Просуммируйте ряд и проверьте, что сумма удовлетворяет уравнению. (I. C., 1936.)

4. Докажите, что если $x = \sin \frac{1}{2}\theta$, $y = \cos n\theta$, то

$$(1 - x^2)\,y'' - xy' + 4n^2y = 0.$$

После этого докажите, что

$$\cos n\theta = 1 - \frac{n^2}{2!}\left(2\sin \frac{1}{2}\theta\right)^2 + \frac{n^2\,(n^2 - 1^2)}{4!}\left(2\sin \frac{1}{2}\theta\right)^4 - \ldots,$$

$$\frac{\sin n\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 2n\sin \frac{1}{2}\theta - \frac{n\,(n^2 - 1^2)}{3!}\left(2\sin \frac{1}{2}\theta\right)^3 + \ldots.$$

5. За какое наименьшее число шагов (т. е. перемен начала координат) можно продолжить функцию так, как это делается в **16.05**, если пользоваться 1) степенными рядами, 2) методом **16.03**, считая, что все точки последовательных разложений равноудалены от особой точки?

6. Покажите, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее регулярные особенности в точках 0, 1, ∞ и не имеющее других особых точек, можно представить в виде

$$x(1-x)\,y'' + (a+bx)\,y' + \frac{c+dx+ex^2}{x(1-x)}\,y = 0.$$

Кроме того, покажите, что если одно решение имеет в точках 0 и 1 индекс (степень первого члена) 0, то последний член этого уравнения равен $-ey$.

7. Найдите все решения уравнения

$$x^2(1+x^2)\,y'' - 2y = 2x^4. \qquad \text{(М. Т., 1936.)}$$

8. Дано уравнение

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

где P и $Q - q_1/x$ $(q_1 \neq 0)$ аналитичны в точке $x = 0$. Докажите, что одно из решений всегда содержит логарифм.

9. Пусть

$$y = \frac{x}{(x+\sqrt{x^2-1})^n \sqrt{x^2-1}}$$

и $x = 1/\xi$. Докажите, используя замену $x = \operatorname{ch} u$, что

$$\xi^2(1-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} + (\xi - 4\xi^3)\frac{dy}{d\xi} - (2\xi^2 + n^2)\,y = 0.$$

Далее докажите, что

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+2r)!}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n+2r}$$
$$(|x| > 1).$$

10. Докажите методом Фробениуса, что решениями

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

служат

$$y_1 = x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2^2\cdot 3} - \ldots + \frac{(-1)^m x^{m+1}}{1\cdot 2^2\cdot 3\ldots(m-1)^2 m} + \ldots$$

и

$$y_2 = 1 + \frac{x}{1^2} - \ldots - \frac{(-1)^m x^m}{1^2\cdot 2^2\ldots(m-1)^2 m} \times$$
$$\times\left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \ldots + \frac{2}{m-1} + \frac{1}{m}\right) - y_1 \ln x.$$

11. Покажите, что решениями

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

служат x и

$$1 - x\ln x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^m}{(m-1)\,m!} \ldots .$$

12. Пусть

$$y'' + \chi(x)\, y = 0,$$

где $\chi(x)$ — интегрируемая функция с периодом 2π. Докажите, что в общем случае решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} \varphi_1(x) + C_2 e^{-\lambda x} \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют период 2π, а в особом случае

$$y = D_1 \psi_1(x) + x D_2 \psi_2(x),$$

где $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ имеют период 2π.

13. Пусть

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x - x_0}\frac{dy}{dx}\right) + g(x)\, y = 0,$$

где $f(x)$, $g(x)$ аналитичны в окрестности точки x_0, причем $f(x_0) \neq 0$. Докажите, что корни определяющего уравнения в точке x_0 отличаются на целое число и тем не менее ни одно решение не содержит логарифма.

14. Пусть W — вронскиан решений y_1, y_2 линейного дифференциального уравнения второго порядка. Преобразовав решение

$$y_3 = (A_1 y_1 + A_2 y_2) \int_c^x \frac{W\, dx}{(A_1 y_1 + A_2 y_2)^2},$$

покажите, что оно является линейной комбинацией y_1 и y_2.

Пусть теперь $W \equiv 1$ и $|y_1|$ велик по сравнению с $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ при больших x ($\varepsilon > 0$). Покажите, что тогда есть решение y_2, растущее при больших x не быстрее $x^{1/2+\varepsilon}$, и что если положить $A_1 = 1$, $c = \infty$ в выражении для y_3, то будет $y_3 = -y_2$ для любого A_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Encycl. d. math. Wiss., II, 1i, p. 198—200.
2. *Whittaker E. T., Watson G. N.*, Modern Analysis, 1915. (Русский перевод: *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.*, Курс современного анализа, М., ОНТИ, 1934.)
3. *Goldstein S.*, Cambr. Phil. Trans., **23**, 303—336 (1927).
4. *Baber W. G., Hassé H. R.* Proc. Cambr. Phil. Soc., **31**, 564—581 (1935).
5. *Riesz F.*, Equations linéaires à une infinité d'inconnues, 1913.
6. *Jeffreys H.*, Operational Methods in Mathematical Physics, 1927.
7. *van der Pol B.*, Phil. Mag. (7) **8**, 861—898 (1929); **13**, 537—577 (1932).
8. *Courant R., Hilbert D.*, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I, 1924. (Русский перевод: *Курант Р., Гильберт Д.*, Методы математической физики, ИЛ, М., 1956.)
9. *Webster A. G.*, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, p. 109—142, 222—238. (Русский перевод: *Вебстер А., Сеге Г.*, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, М. — Л., Гостехиздат, 1934.)
10. *Bickley W. G., Temple G.*, Rayleigh's principle, 1933.

Глава 17

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Вверх к вершинам светлым
Вниз к глухим долам.

Уильям Аллингхэм

17.01. Природа асимптотических разложений: неполный факториал *). Неполный факториал определяется интегралом

$$I = \int_x^\infty e^{-t} t^{-n}\, dt, \tag{1}$$

где x и n — положительные числа. Интегрируя выражение (1) по частям, получаем

$$I = e^{-x}x^{-n} - n\int_x^\infty e^{-t}t^{-n-1}\,dt =$$

$$= e^{-x}\{x^{-n} - nx^{-n-1} + n(n+1)\,x^{-n-2} \ldots + (-1)^r n(n+1)\ldots$$

$$\ldots (n+r-1)\,x^{-n-r}\} - (-1)^r n(n+1)\ldots(n+r)\int_x^\infty e^{-t}t^{-n-r-1}dt. \tag{2}$$

Это точное значение I. Интеграл в последнем члене соотношения (2) всегда положителен, но коэффициент при нем меняет знак для последовательных значений r. Следовательно, ошибка, которая получится, если этот член отбросить, также последовательно меняет знак, и поэтому точное значение интеграла (1) всегда находится между суммами из r и $r+1$ членов ряда. Отношение члена с x^{-n-r} к предыдущему равно $-(n+r-1)/x$. Если x достаточно велико по сравнению с n, последовательные члены ряда будут уменьшаться до минимума, а затем снова возрастать. Если оборвать ряд (2) на члене, предшествующем наименьшему члену суммы, то ошибка будет меньше наименьшего члена, составляющего лишь малую часть всей суммы. Таким способом мы можем получить хорошее приближение к значению интеграла. Тем не менее члены ряда (2) для произвольного r являются членами расходящегося знакопеременного

*) Incomplete factorial function (см. гл. 15). — *Прим. перев.*

ряда. Эти свойства ряда (2) аналогичны тем, какие мы обнаружили ранее для некоторых приближений, основанных на разложении Эйлера — Маклорена.

Ряд, подобный (2), называется *асимптотическим разложением* *). В действительности это разложение нельзя рассматривать как бесконечный ряд; выражение „использование расходящихся рядов" может вызвать недоразумение. Будем рассматривать разложение как сумму с конечным числом слагаемых, останавливаясь всякий раз или на члене, предшествующем наименьшему, или несколько раньше, — если мы уже достигли желаемой точности. При подходящих условиях точность может быть очень велика. Но в отличие от сходящегося ряда, который в принципе дает любую точность, если взять достаточное число членов, точность асимптотического ряда определенным образом ограничена: взяв больше некоторого числа членов, мы снова увеличим ошибку. Члены сходящихся рядов часто уменьшаются с самого начала, как, например, в случае рядов

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+, \ldots; \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\ldots.$$

Для второго из этих рядов ошибка, которая получится, если остановиться на любом члене, меньше по абсолютной величине, чем первый отброшенный член; для первого она меньше, чем последний учитываемый член. В случае ряда

$$1+100+\frac{10^4}{2!}+\frac{10^6}{3!}+\ldots,$$

который хотя и сходится и, следовательно, определяет абсолютно точно некоторое число, члены возрастают до сотого номера; чтобы найти сумму прямыми вычислениями, необходимо затратить колоссальный труд **). Для вычислений особенно важно такое свойство ряда, как быстрое убывание уже первых его членов, ибо тогда последовательные суммы можно рассматривать как последовательные приближения. Этим свойством может не обладать сходящийся ряд, и его может иметь ряд расходящийся. Однако вычисление с помощью последовательных приближений является характерной чертой научной работы в тех случаях, когда результаты должны быть доведены до чи-

*) Вопросы, изложенные в этой главе, более подробно рассмотрены в книге: H. Jeffreys, Asymptotic Approximations, 1962.

**) В действительности мы должны вычислить с помощью таблиц десятичных логарифмов $100 \lg e$. Если в нашем распоряжении имеется арифмометр, то можно двояко использовать десятичные логарифмы: для нахождения больших степеней чисел и для определения натуральных логарифмов больших чисел.

сла. Точное решение удается получить довольно редко; желательно тем не менее уметь оценивать точность приближенных выражений, и это в наиболее удобной форме дается такими рядами, как (2).

Формула Эйлера — Маклорена в общем случае есть асимптотическое разложение. Если рассматриваемая функция является полиномом, то ряд обрывается и вопрос исчерпан. Но если функция содержит дробные или отрицательные степени аргумента, то высшие производные на каждом шагу приобретают пару сомножителей вида $(n-2r)(n-2r-1)/x^2$, а коэффициенты b_{2r} уменьшаются в то же время лишь как $(2\pi)^{-2r}$. Значит, какой бы маленький интервал мы ни взяли, члены в конце концов будут неограниченно возрастать за счет накопления сомножителей в числителе. Следовательно, этот ряд, если его рассматривать как бесконечный, будет расходящимся. Тем не менее методом **9.08** нетрудно проверить, какая высокая точность может быть достигнута при использовании таких рядов.

17.02. Определение Пуанкаре. Обычное определение асимптотического разложения, принадлежащее Пуанкаре, состоит в следующем. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, $S_n(z)$ — частичная сумма членов ряда до $A_n z^{-n}$:

$$S(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots \qquad (1)$$

и $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$. Тогда ряд (1) называется асимптотичным разложением $f(z)$ в пределах заданного интервала изменения $\arg z$, если для каждого n

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n R_n(z) = 0. \qquad (2)$$

В этом случае мы пишем

$$f(z) \sim S(z). \qquad (3)$$

Степенной по $1/z$ ряд, сходящийся при $|z| > R$, удовлетворяет этому определению асимптотического разложения. Действительно, существует такая константа M, что остаточный член будет по модулю меньше, чем $M|z|^{-n}/(|z|/R-1)$ для всех значений $\arg z$.

17.021. Асимптотические ряды можно почленно перемножать. Действительно, если

$$S_n(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \ldots + \frac{A_n}{z^n}, \qquad (1)$$

$$T_n(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \ldots + \frac{B_n}{z^n} \qquad (2)$$

асимптотические представления функций $f(z)$ и $g(z)$, то мы можем выбрать z таким, что обе величины

$$|z^n[f(z)-S_n(z)]|, \quad |z^n[g(z)-T_n(z)]|$$

будут сколь угодно малы.

Поэтому имеем

$$S_n(z)\,T_n(z)=C_0+\frac{C_1}{z}+\ldots\frac{C_n}{z^n}+o(z^{-n})=U_n(z)+o(z^{-n}), \qquad (3)$$

где

$$C_m=A_0B_m+A_1B_{m-1}+\ldots+A_mB_0, \qquad (4)$$

величина $z^n[f(z)\,g(z)-U_n(z)]$ есть сумма трех членов, стремящихся к нулю одновременно с $1/z$ для всех n.

17.022. Асимптотические ряды можно почленно интегрировать. Действительно, если в области $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$, $|z|>R$ функция $f(z)$ аналитическая и

$$|z^n[f(z)-S_n(z)]|<\omega$$

и если z_1 удовлетворяет написанному выше неравенству, возьмем путь интегрирования от z_1 до бесконечности при постоянном значении $\arg z$. Тогда

$$\left|\int_{z_1}^{\infty}[f(z)-S_n(z)]\,dz\right|<\int_{|z_1|}^{\infty}\frac{\omega}{r^n}\,dr=\frac{\omega}{(n-1)\,|z_1|^{n-1}},$$

или

$$\left|z_1^{n-1}\left[\int_{z_1}^{\infty}f(z)\,dz-\int_{z_1}^{\infty}S_n(z)\,dz\right]\right|<\frac{\omega}{n-1},$$

и таким образом, интегрируя почленно $S_n(z)$, мы получим асимптотическое разложение функции $\int_{z_1}^{\infty}f(z)\,dz$.

Пусть z_1 и z_2 имеют одинаковые модули; соединим их дугой окружности с центром в начале координат; длина этой дуги $L<2\pi|z_1|$,

$$\left|\int_{z_1}^{z_2}[f(z)-S_n(z)]\,dz\right|<\frac{\omega L}{|z_1|^n}<\frac{2\pi\omega}{|z_1|^{n-1}},$$

и, следовательно, получается тот же результат. Поскольку и $f(z)$, и $S_n(z)$ в нашей области не имеют особенностей, мы можем, не изменяя значение интеграла, взять путь интегрирования

между двумя произвольными точками области, состоящим из кусков с постоянными значениями $\arg z$ модуля z. Отсюда и следует наше утверждение.

17.023. Асимптотические разложения единственны. Действительно, если для всех $|z|>R$, $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to\infty} z^n\left[f(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} - \ \ldots \ \frac{A_n}{z^n}\right] = 0, \\ &\lim_{z\to\infty} z^n\left[f(z) - B_0 - \frac{B_1}{z} - \ \ldots \ \frac{B_n}{z^n}\right] = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

то

$$\lim_{z\to 0} z^n\left(A_0 - B_0 + \frac{A_1 - B_1}{z} + \ \ldots \ + \frac{A_n - B_n}{z^n}\right) = 0 \tag{2}$$

и, следовательно,

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ \ldots, \ A_n = B_n. \tag{3}$$

Отсюда следует, что $f(z)$ *может иметь асимптотическое разложение вида* **17.02** (1) *одновременно для всех значений* $\arg z$ *лишь при условии, что соответствующий ряд будет сходящимся.* Действительно, если условие **17.02** (2) выполняется для всех значений $\arg z$, мы можем выбрать такие постоянные M и R, что $|z^n R_n(z)| < M$ для всех $|z|>R$; и тогда, согласно неравенству Коши, $z^n R_n(z)$ имеет сходящееся разложение по степеням $1/z$. Следовательно, $f(z)$ будет обладать сходящимся разложением с асимптотическим свойством. Но тогда из предыдущего следует, что единственное асимптотическое разложение $f(z)$ — это сходящийся ряд.

17.024. Обратное неверно; различные функции в данной области могут иметь одно и то же асимптотическое разложение, если только их разность $f(z) - g(z)$ для каждого n удовлетворяет условию

$$\lim z^n [f(z) - g(z)] = 0.$$

Например, это имеет место, если $\arg z$ меняется от $-{}^1/_4\pi$ до ${}^1/_4\pi$, а $f(z) - g(z) = e^{-z}$.

Определение Пуанкаре, таким образом, не ограничивает для данного z пределы ошибки, и обычно эти пределы находятся специальными методами.

17.03. Лемма Ватсона. Два наиболее важных метода получения асимптотических разложений — это метод наискорейшего спуска, принадлежащий Дебаю, и метод стационарной фазы, принадлежащий Кельвину. Оба эти метода в значительной мере, но не полностью, эквивалентны. Прежде всего нам

понадобится одна форма леммы Ватсона [1, 2]. Рассмотрим интеграл вдоль действительной оси

$$I=\int_0^Z e^{-az}z^m f(z)\,dz, \tag{1}$$

где функция $f(z)$ аналитическая и $f(0)\neq 0$; Z не зависит от a и может быть бесконечным; a — достаточно большое действительное положительное число; и, наконец, для некоторого a (например, $a=\alpha$) интеграл I сходится. Отсюда следует, что $m>-1$. Разложение в ряд $f(z)$ внутри круга сходимости имеет вид

$$f(z)=a_0+a_1z+\ \dots\ +a_{n-1}z^{n-1}+R_n(z), \tag{2}$$

где $R_n(z)/z^n$ стремится к конечному пределу, когда $z\to 0$. Зафиксируем в интервале $(0, Z)$ какую-нибудь точку A, лежащую внутри круга сходимости; тогда

$$I=\left[\int_0^A+\int_A^Z\right]e^{-az}z^m f(z)\,dz. \tag{3}$$

В интервале $(0, A)$ функция

$$g(z)=[f(z)-(a_0+a_1z+\ \dots\ +a_{n-1}z^{n-1})]\,z^{-n} \tag{4}$$

ограничена. Пусть M — верхняя грань ее модуля. Тогда

$$I_A=\int_0^A e^{-az}z^m f(z)\,dz=\int_0^A e^{-az}z^m(a_0+a_1z+\ \dots\ +a_{n-1}z^{n-1})\,dz+$$
$$+\int_0^A e^{-az}z^m\theta Mz^n\,dz, \tag{5}$$

где $|\theta|\leqslant 1$. Положим $z=A(1+u)$, тогда $(1+u)^{m+r}\leqslant$ $\leqslant e^{(m+r)u}$ $(m+r)>0$ и $(1+u)^{m+r}\leqslant 1$ $(m+r\leqslant 0)$, а

$$\int_A^\infty e^{-az}z^{m+r}\,dz<\int_0^\infty A^{m+r+1}e^{-Aa-aAu}e^{(m+r)u}\,du=$$
$$=A^{m+r+1}e^{-Aa}/(Aa-m-r)\qquad (m+r)>0, \tag{6}$$
$$\int_N^\infty e^{-az}z^{m+r}\,dz<A^{m+r}e^{-Aa/a}\qquad m+r\leqslant 0,$$

$$I_A=\sum_{r=0}^{n-1}a_r\frac{(m+r)!}{a^{m+r+1}}+O(e^{-aA})+\theta\frac{M(m+n)!}{a^{m+n+1}}. \tag{7}$$

Для $a=\alpha$ обозначим через N верхнюю грань $\left|\int_A^X e^{-az}z^m f(z)\,dz\right|$ для всех X из интервала (A, Z). Тогда из леммы Абеля для интегралов (поскольку $e^{-(a-\alpha)z}$ положительная убывающая функция от z) следует, что

$$\left|\int_A^Z e^{-az}z^m f(z)\,dz\right| \leqslant 2e^{-(a-\alpha)A}N, \tag{8}$$

поэтому

$$\left|I-\sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{(m+r)!}{a^{m+r+1}}\right| < \frac{M(m+n)!}{a^{m+n+1}} + Ke^{-aA}, \tag{9}$$

где K — не зависящая от a постоянная. Если мы помножим обе части неравенства на a^{m+n} и затем устремим a к ∞, то правая часть будет стремиться к 0. Следовательно,

$$\int_0^Z e^{-az}z^m f(z)\,dz \sim \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m+r)!\,a_r}{a^{m+r+1}}. \tag{10}$$

Ничто не мешает взять верхний предел Z бесконечным, поскольку лемма Абеля остается в силе, если только соответствующий интеграл сходится для некоторого α. Кроме того, $f(z)$ может быть неограничена в окрестности одной или нескольких точек при условии, что несобственный интеграл сходится.

У Ватсона функция $f(z)$ ограничена на всей действительной оси, а $Z=\infty$. Эти условия часто (однако не всегда) выполняются, и то незначительное обобщение, которое мы сделали, в дальнейшем может оказаться полезным.

Ряд (10) расходится, если $f(z)$ имеет особенность на конечном расстоянии R от начала координат. Действительно, для любого $R'>R$ существует такое k, что неравенство $|a_r|>k/R'^r$ справедливо для бесконечного числа значений r, и, значит, для любого заданного a члены (10) не ограничены по r.

Лемма доказывает существование асимптотического разложения в смысле Пуанкаре и определяет соответствующие коэффициенты. Она не дает, однако, для данного a оценку ошибки, которая получится, если остановиться на заданном члене разложения, поскольку мы не оценили значения M. Оценка точности, которую дает сумма до наименьшего члена, может быть получена методом „использования множителей

сходимости" *), как назвал его Эйри [3]. Наиболее просто этот принцип иллюстрируется на нашем первом примере. Интеграл в остаточном члене был равен

$$\int_x^\infty e^{-t}t^{-n-r-1}\,dt,$$

и если $n+r=x$, следующий член ряда численно равен последнему учитываемому члену.

Но если мы возьмем логарифмическую производную от подынтегральной функции, то получим

$$\frac{d}{dt}[-t-(n+r+1)\ln t] = -1-\frac{n+r+1}{t},$$

и два члена справа приблизительно равны при $t=x$. Следовательно, интеграл приблизительно равен

$$e^{-x}x^{-n-r-1}\int_0^\infty e^{-2u}\,du = \frac{1}{2}e^{-x}x^{-n-r-1},$$

а остаточный член приблизительно равен

$$(-1)^{r+1}\frac{1}{2}n(n+1)\ldots(n+r)e^{-x}x^{-n-r-1},$$

что составляет ровно *половину* следующего члена разложения. Таким образом, можно весьма простым путем значительно улучшить точность, если асимптотический ряд суммировать до наименьшего члена, а затем прибавлять половину следующего члена. Еще большая точность получается, если разложить $[t+(n+r+1)\ln t]$ до более высоких степеней $(t-x)/x$. Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. 23.

Наиболее интересен для нас случай, когда

$$I = \int_{-A}^{B} e^{-\frac{1}{2}b^2z^2}f(z)\,dz, \tag{11}$$

где A и B больше нуля и не зависят от b, а $f(z)$ разлагается в ряд в окрестности нуля по формуле (2). Положим $z^2=\zeta$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} e^{-\frac{1}{2}b^2\zeta}f(-\zeta^{1/2})\zeta^{-1/2}\,d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^{B^2} e^{-\frac{1}{2}b^2\zeta}f(\zeta^{1/2})\zeta^{-1/2}\,d\zeta. \tag{12}$$

*) Use of convergence factors. — *Прим. перев.*

Нечетные степени взаимно уничтожаются, и поэтому

$$I \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{a_0}{b}+\frac{a_2}{b^3}+1\cdot 3\frac{a_4}{b^5}+\ \ldots\ +1\cdot 3\ldots(2n-1)\frac{a_{2n}}{b^{2n+1}}\right). \quad (13)$$

17.04. Метод наискорейшего спуска. Этот метод принадлежит Дебаю и применяется для приближенного вычисления интегралов вида

$$I=\int_A^B \chi(z)\, e^{tf(z)}\, dz, \quad (1)$$

где t — достаточно большое действительно положительное число, а $f(z)$ — аналитическая функция.

Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\varphi+i\psi, \quad (2)$$

отделяя действительную и мнимую части. Обе функции φ и ψ удовлетворяют уравнению Лапласа, и подынтегральное выражение будет велико там, где алгебраически велико φ. Преобразование от x, y к φ, ψ является неособенным в области, не содержащей нулей или особенностей $f'(z)$. В такой области мы можем перейти за конечное число шагов от A к B, двигаясь вдоль линий, где φ или ψ постоянны. Положим $f(z)=\zeta$. Тогда

$$I=\int_{z=A}^{B} e^{t\zeta}\frac{\chi(z)}{f'(z)}\,d\zeta=\int_{z=A}^{B} e^{t\zeta}g(\zeta)\,d\zeta. \quad (3)$$

Предположим вначале, что функция $g(\zeta)$ в рассматриваемой области аналитическая. Тогда $g(\zeta)$ имеет там ограниченную производную, и ее действительная и мнимая части имеют ограниченную вариацию на конечных участках линии, где φ или ψ постоянны. Мы можем применить здесь неравенство, полученное для интегралов в **1.134a**. Если на пути от A к B функция ψ постоянна и $\varphi_A>\varphi_B$, то такой путь называется одним из путей *наискорейшего спуска*. В этом случае

$$I=\int_{z=A}^{B} e^{t\zeta_A}e^{-t(\varphi_A-\varphi)}g(\zeta)\,d\varphi. \quad (4)$$

Если путь таков, что постоянно φ, то

$$I=i\int_{z=A}^{B} e^{t\zeta_A}e^{it(\psi-\psi_A)}g(\zeta)\,d\psi, \quad (5)$$

$$|e^{-t\zeta_A}I|<2\sqrt{2}\,[|g(B)|+V(B)]/t, \quad (6)$$

где $V(B)$ большее из двух полных вариаций функций $\operatorname{Re} g(\zeta)$, $\operatorname{Im} g(\zeta)$ на этом пути. В любом случае

$$I = O\left(e^{t\varphi_A}/t\right) \tag{7}$$

при условии, что $\varphi_A \geqslant \varphi_B$. Для бесконечных путей необходимо еще непосредственно проверить, будет ли конечной величина $V(B)$.

Поскольку величина $\varphi_A - \varphi$ действительна, а функция $g(\zeta)$ аналитическая, мы можем написать, пользуясь леммой Ватсона, асимптотическое разложение для интеграла (4)

$$I \sim -e^{t\zeta_A}\left[\frac{g(A)}{t} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^r}{t^{r+1}}\left(\frac{\partial^r}{\partial \zeta^r} g(\zeta)\right)_{z=A}\right]. \tag{8}$$

Если точки A и B соединяют путь, на котором постоянно φ, мы можем найти путь с постоянным φ от точки A' к B', такой, что $\varphi_{A'} = \varphi_{B'} < \varphi_A$ и $\psi_{A'} = \psi_A$, $\psi_{B'} = \psi_B$. Тогда I будет равняться сумме интегралов вдоль путей AA', $A'B'$, $B'B$, причем φ постоянно на участке $A'B'$, а ψ постоянно на участках AA' и $B'B$. Согласно (7), интеграл вдоль пути $A'B'$ есть величина порядка $O\left(e^{t\varphi_{A'}}/t\right)$. Интегралы вдоль AA' и $B'B$ могут быть аппроксимированы при помощи (8), и для всех r

$$\left|t^{r+1} e^{t(\varphi_{A'} - \varphi_A)}\right| \to 0, \tag{9}$$

когда $t \to \infty$. Следовательно, интеграл вдоль $A'B'$ не вносит никакого вклада в асимптотическое разложение I (при условии, что, как и прежде, $\operatorname{Re} g(\zeta)$ и $\operatorname{Im} g(\zeta)$ имеют на $A'B'$ ограниченную вариацию).

Отсюда следует, что точное определение тех участков пути интегрирования, где ψ постоянно, редко является необходимым; асимптотическое разложение полностью определяется поведением подынтегральной функции вблизи тех точек, где φ достигает наибольшего значения.

Часто случается, что на некотором пути, соединяющем точки A и B (z-плоскости), имеются точки, где φ превосходит по величине как φ_A, так и φ_B. В этом случае φ достигает максимума во внутренней точке пути. Предположим, что на участке пути, который проходит через такую точку, ψ постоянно (φ не может быть на нем постоянно). Тогда, если ds и dn — элементы длины по направлениям касательной и нормали к пути, мы будем иметь в точке максимума $\partial\psi/\partial s = 0$, $\partial\varphi/\partial s = 0$; из соотношения Коши — Римана будет следовать, что $\partial\varphi/\partial n = 0$, $\partial\psi/\partial n = 0$. Следовательно, в этой точке $f'(z) = 0$ и функция $g(\zeta)$,

определенная равенством (3), перестает быть аналитической. Такие точки известны под названием *седловых точек*, или *точек перевала*.

Другой подход состоит в том, чтобы рассматривать максимумы φ на всех путях, соединяющих A и B. Если максимум φ для некоторого пути принимает минимальное значение, то в соответствующей точке выполнено условие $\partial\varphi/\partial n = 0$; с другой стороны, в той же точке $\partial\varphi/\partial s = 0$, поскольку φ достигает здесь максимума; следовательно, $f'(z) = 0$.

Линии, где ψ постоянно, называются *линиями наискорейшего спуска*, так как в любой точке этого пути направление таково, что величина $|\partial\varphi/\partial s|$ принимает наибольшее значение. Если θ есть угол наклона пути относительно оси x, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{10}$$

и если $\partial\varphi/\partial s$ должно быть стационарным при изменении θ, то

$$0 = -\sin\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial y} - \cos\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial s}, \tag{11}$$

а это выполняется на тех путях, где ψ постоянно.

Поэтому для таких случаев удобно выбрать часть пути интегрирования так, чтобы он содержал линию наискорейшего спуска, проходящую через седловую точку, поскольку при этом бо́льшие значения φ будут сосредоточены на максимально коротком интервале пути.

φ не может быть максимально для всех изменений x, y в окрестности какой-либо точки. Через седловую точку z_0 будут проходить по меньшей мере две кривые с постоянными значениями φ, разделяя окрестность точки на сектора. Те сектора, где значения φ меньше, чем в точке z_0, называются *долинами*, те, где оно больше, чем в z_0, называются *холмами*.

Если A и B находятся в разных долинах относительно седловой точки z_0, наилучший путь интегрирования будет ACz_0DB, где $\varphi_C = \varphi_A$, $\varphi_D = \varphi_B$, а Cz_0D — путь с постоянным ψ, проходящий через z_0. В этом случае приближенное выражение (8) не годится, поскольку значение $g(z_0)$ может оказаться бесконечным, однако эту трудность можно преодолеть методом, который описан ниже.

Вклад от участков AC и DB пренебрежимо мал по сравнению с тем, что дает путь Cz_0D, и это есть наиболее замечательная особенность этого метода.

Изолированные особенности функции $g(\zeta)$, не лежащие на пути интегрирования, в общем случае не влияют на приближенное выражение, поскольку все определяется тем, какие

значения принимает верхняя грань модуля $g(\zeta)$ или полная вариация действительной и мнимой частей этой функции на рассматриваемом пути интегрирования. Если путь от A к B, вдоль которого φ или ψ не постоянны, заменен на путь, состоящий из участков, где φ или ψ постоянны, то между первоначальным путем и новым может оказаться особенность функции $g(\zeta)$ — точка z_1. Однако интеграл, получающийся при обходе вокруг точки z_1, содержит множитель вида $\exp t\varphi(z_1)$, который экспоненциально мал по сравнению с величиной $\exp t\varphi(z_0)$.

Линии наискорейшего спуска оканчиваются лишь в тех точках, где функция $f(z)$ имеет особенность, или они уходят в бесконечность.

Если z_0 — седловая точка и $f''(z_0) \neq 0$, то в окрестности z_0 функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(z_0) + \ldots, \tag{12}$$

и направление пути интегрирования должно быть таким, чтобы величина $(z - z_0)^2 f''(z_0)$ была действительной и отрицательной. Если мы теперь положим

$$f(z) - f(z_0) = -\frac{1}{2}\zeta^2 \tag{13}$$

и будем рассматривать ζ как новое независимое переменное, то получим интеграл того же вида, что и в лемме Ватсона. Отсюда можно заключить о существовании асимптотического разложения интеграла (1) по отрицательным степеням $t^{1/2}$. На практике, однако, непосредственное обращение рядов во многих случаях затруднительно; если требуется найти члены разложения, следующие за первым, для обратной функции, то применяют некоторые другие способы. Тем не менее для многих целей достаточно найти только первый член асимптотического разложения (1), и это довольно легко сделать. Имеем

$$I = e^{tf(z_0)} \int \chi(z)\, e^{-\frac{1}{2}t\zeta^2}\, dz = e^{tf(z_0)} \int e^{-\frac{1}{2}t\zeta^2} \chi(z) \frac{dz}{d\zeta}\, d\zeta. \tag{14}$$

Если значение z на пути интегрирования вблизи седловой точки z_0 представить в виде

$$z - z_0 = re^{i\alpha}, \tag{15}$$

где r принимает действительные, малые по величине значения, то

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= -f''(z_0)\, r^2 e^{2i\alpha}, \\ \zeta &= \pm r\, |f''(z_0)|^{1/2}, \end{aligned} \tag{16}$$

поскольку $f''(z_0)\, e^{2i\alpha}$ — действительное отрицательное число.

Отсюда следует, что

$$\frac{d\zeta}{dz} = \pm e^{-i\alpha} |f''(z_0)|^{1/2}. \tag{17}$$

В интервале $(-\pi, \pi)$ для выбора значения α есть две возможности; оба эти значения отличаются между собой на π. Всякий раз, применяя данный метод, необходимо рассмотреть поведение функций φ и ψ на всей комплексной плоскости, для того чтобы установить, каким образом путь интегрирования проходит через седловую точку. Если значение α выбрано так, что величина r после прохождения через z_0 становится положительной, то в выражении (16) нужно взять знак плюс, когда ζ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ на всем пути интегрирования. Тогда из леммы Ватсона следует, что интеграл (1) асимптотически представляется в виде:

$$I \sim \frac{\chi(z_0)\, e^{tf(z_0)} \sqrt{2\pi}\, e^{i\alpha}}{|tf''(z_0)|^{1/2}}. \tag{18}$$

Поскольку для всех n величина $t^{-n}\exp[tf(z_0)]$ велика (если только действительная часть $f(z_0)$ больше нуля), то для строгости нам следовало бы переписать (18) в виде

$$e^{-tf(z_0)} I \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, \chi(z_0)}{|tf''(z_0)|^{1/2}} e^{i\alpha}, \tag{19}$$

с тем, чтобы было применимо определение Пуанкаре. Однако в дальнейшем удобнее пользоваться выражением типа (18), имея в виду при этом, что экспоненциальные сомножители, встречающиеся в таких выражениях, необходимо перенести в левую часть, как это сделано в (19). Лишь после этого определение Пуанкаре становится применимым.

Этот метод ограничивает нас путями наискорейшего спуска, которые проходят вдоль линии постоянного φ; если же пределы интегрирования таковы, что максимум φ находится в какой-либо внутренней точке, то путь наискорейшего спуска, проходящий через седловую точку, выбирается так, чтобы пройти через возможно меньший максимум. Может случиться так, что при этих ограничениях любой путь, который может быть деформирован в путь AB, проходит по крайней мере через две седловые точки. Если это так, то тогда каждая из этих точек дает свой вклад в разложение интеграла; наибольший вклад при этом дает та седловая точка, где φ достигает наибольшего значения.

Путь, проходящий через седловую точку z_0 при постоянном значении ψ, может также проходить и через вторую седловую точку z_1. Если значение φ в точке z_0 достигло максимума, то φ будет иметь минимум в точке z_1, а затем, минуя z_1, будет снова

увеличиваться по мере продвижения вдоль пути. Следовательно, в этом случае линия наискорейшего спуска скачком повернет на прямой угол в точке z_1.

Вклад, который дает окрестность точки z_1, будет экспоненциально мал по сравнению с тем, что дает окрестность точки z_0, однако этот случай интересен в связи с явлением Стокса, которое мы рассмотрим несколько позже. Ранее мы предполагали, что $f''(z_0) \neq 0$. Если первой не обращающейся в нуль производной является $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ $(n > 2)$, то в точке z_0 встречаются три или больше долины и необходимо установить, через какую пару из них проходит путь интегрирования. При этом все рассуждения, основанные на лемме Ватсона, нуждаются в очевидных обобщениях.

17.05. Пути постоянного φ; метод стационарной фазы. Если на пути AB, вдоль которого берется интеграл **17.04** (1), φ постоянно, а функция χ/ψ' имеет ограниченную вариацию, то, как мы уже видели, интеграл имеет величину порядка $O(e^{t\varphi}/t)$, и соответствующую аппроксимацию можно получить, если пользоваться путем $AA'B'A$. В случае, когда между A и B лежит одна седловая точка, это рассуждение не годится, поскольку если $\partial\psi/\partial s$ меняет знак в седловой точке, то и $\partial\varphi/\partial n$ также меняет там знак; поэтому если $\varphi_{A'} < \varphi_A$ и $\varphi_{B'} < \varphi_B$, то точки A' и B' лежат на противоположных сторонах от AB, значит, величина φ на пути $A'B'$ не может принимать значения равномерно меньше тех, которые она принимает на AB.

Однако мы можем действовать следующим образом. Предположим, что путь постоянного φ проходит вдоль действительной оси x в положительном направлении; седловая точка расположена в x_0; $\psi'(x_0) = 0$, $\psi''(x_0) \neq 0$. Тогда для всех точек AB, достаточно близких к x_0,

$$f(z) = f(x_0) + \tfrac{1}{2} i\psi''(x_0)(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3, \qquad (1)$$

и поскольку по предположению функция $f(z)$ аналитическая, то

$$f(z) = f(x_0) + \tfrac{1}{2} i\psi''(x_0)(z - z_0)^2 + O(z - z_0)^3. \qquad (2)$$

Если $\psi''(x_0) > 0$, то α из **17.04** (15) равно $+\,{}^1/_4\pi$; если же $\psi''(x_0) < 0$, то $\alpha = -\,{}^1/_4\pi$. Тогда интеграл **17.04** (1), взятый вдоль линии наискорейшего спуска, равен

$$\chi(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{t\,|\psi''(x_0)|}}\exp\Big[t\varphi(x_0) + it\psi(x_0) + \tfrac{1}{4}\pi i \operatorname{sgn}\psi''(x_0)\Big] + \\ + O\Big(\frac{1}{t}\exp t\varphi(x_0)\Big). \qquad (3)$$

Если в области интегрирования находится вторая седловая точка x_1, то $\psi''(x_1)$ будет иметь знак, противоположный знаку $\psi''(x_0)$; поскольку φ здесь постоянно, точка x_1 будет давать вклад в асимптотическое разложение того же порядка, что и точка x_0.

В том случае, когда функция ψ не задана как мнимая часть некоторой аналитической функции, аппроксимацию интеграла $\int e^{it\psi}\chi(x)\,dx$ можно все-таки найти методами, подобными тем, которые применялись для доказательства теоремы Фурье. В любом интервале, где функция χ/ψ' имеет ограниченную вариацию, справедлива, как и в предыдущем случае, оценка $I = O(1/t)$. Если $\psi'(x_0) = 0$ и $\psi''(x_0) > 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 положим

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{1}{2}u^2 \doteqdot \frac{1}{2}\psi''(x_0)(x - x_0)^2. \tag{4}$$

Будем считать, что $u > 0$, когда $x > x_0$. Если δ — фиксированное, положительное число и

$$I_\delta = \int_{x=x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\chi(x)}{\psi'(x)} \exp it\left[\psi(x_0) + \frac{1}{2}u^2\right] u\,du, \tag{5}$$

то имеем

$$\psi'(x) \doteqdot \psi''(x_0)(x - x_0) \doteqdot [\psi''(x_0)]^{1/2} u. \tag{6}$$

Поэтому

$$\frac{\chi(x)\,u}{\psi'(x)} = a_0 + \theta u; \quad a_0 = \frac{\chi(x_0)}{[\psi''(x_0)]^{1/2}}, \tag{7}$$

где $\theta u \to 0$, когда $u \to 0$. Далее, если величина θ имеет ограниченную вариацию в интервале $(-\delta, \delta)$, то

$$\int_{x=x_0-\delta}^{x_0+\delta} \theta u \exp itu^2\,du = O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{8}$$

$$\int_{x=x_0-\delta}^{x_0+\delta} \exp itu^2\,du \sim \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \exp\frac{1}{4}\pi i. \tag{9}$$

Отсюда

$$I \sim I_\delta + O\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{\chi(x_0)}{|\psi''(x_0)|^{1/2}} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \exp\left[it\psi(x_0) + \frac{1}{4}\pi i\right] + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{10}$$

Если же $\psi''(x_0) < 0$, мы должны в равенстве (4) заменить u^2 на $-u^2$. Это приведет к тому, что в выражении (5) вместо $\psi'(x)$ будет стоять $-\psi'(x)$, а u^2 заменится на $-u^2$; в (10) мы

будем иметь $-{}^1/_4\pi i$ вместо ${}^1/_4\pi i$. Результат, таким образом, полностью согласуется с выражением (3) в случае, когда $\varphi = 0$.

Идея этого метода принадлежит Стоксу и Кельвину, которые заметили, что в задаче о распространении волн вклады от участков интегрирования вблизи точки стационарной фазы имеют приблизительно одинаковую фазу и складываются, в то время как вклады от остальных участков интерферируют. Однако далеко не просто найти этим методом дальнейшие члены асимптотического разложения.

17.06. Вывод формулы Стирлинга методом наискорейшего спуска. Наиболее простое применение леммы Ватсона можно показать на примере факториала

$$z! = \int_0^\infty u^z e^{-u}\, du \qquad (\mathrm{Re}\,(z) > -1). \tag{1}$$

Положим $u = zv$. Тогда, поскольку z^z можно представить как $\exp(z \ln z)$ с $|\arg z| < \pi$,

$$z! = z^{z+1} \int_0^\infty \exp[z(\ln v - v)]\, dv. \tag{2}$$

Возьмем

$$z = re^{i\theta},$$

где θ — фиксированное число, и попытаемся найти аппроксимацию (2) для заданного θ и большого r. Перепишем (2) в виде

$$z! = z^{z+1} \int_0^\infty \exp\{r[e^{i\theta}(\ln v - v)]\}\, dv, \tag{3}$$

так что

$$f(v) = e^{i\theta}(\ln v - v), \quad f'(v) = e^{i\theta}\left(\frac{1}{v} - 1\right), \quad f''(v) = -\frac{e^{i\theta}}{v^2}. \tag{4}$$

Если мы сделаем разрез от 0 до $-\infty$, то функция $\ln v - v$ будет аналитической. Единственная седловая точка — это точка $v = 1$, где $f(v) = -e^{i\theta}$, $f''(v) = -e^{i\theta}$.

Если v действительное и положительное, то функция $\mathrm{Re}\, f(v) = \cos\theta(\ln v - v)$ никогда не превышает своего значения в точке $v = 1$, если только $\cos\theta > 0$. Следовательно, на действительной оси по обе стороны от точки $v = 1$ лежат ровно две долины, ограниченные соответственно 0 и ∞. Функция $\mathrm{Im}\, f(v)$ на действительной оси нигде не постоянна, кроме случая, когда $\theta = 0$. Направление линии наискорейшего спуска, которое проходит

через точку $v=1$, определяется аргументом числа $w=v-1$, при котором величина $-f''(1)\,w^2=e^{i\theta}w^2$ действительна и положительна, так что $\arg w=-{}^1/_2\theta$ или $\pi-{}^1/_2\theta$. Какое из этих двух значений нам нужно выбрать, видно из следующих соображений.

Пусть $\delta>0$. Обозначим

$$v_1=1-\delta e^{-{}^1/_2 i\theta},\quad v_2=1+\delta e^{-{}^1/_2 i\theta};$$

тогда путь, состоящий из отрезков прямых от 0 до v_1, 1, v_2, ∞, за исключением седловой точки, целиком лежит в долинах, поэтому направление линии наискорейшего спуска должно быть всегда слева направо через седловую точку.

Для больших r

$$z!\sim z^{z+1}\exp(-re^{i\theta})\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,e^{-{}^1/_2 i\theta}= \tag{5}$$

$$=\sqrt{2\pi}\,z^{z+{}^1/_2}e^{-z}\qquad \cos\theta>0, \tag{6}$$

где должно быть взято то значение $z^{1/2}$, у которого вещественная часть положительна.

Это и есть первый член разложения Стирлинга. Заметим еще, что если $\cos\theta>0$, то условие $\operatorname{Re} z>-1$ всегда выполняется, и в этом случае оно становится ненужным.

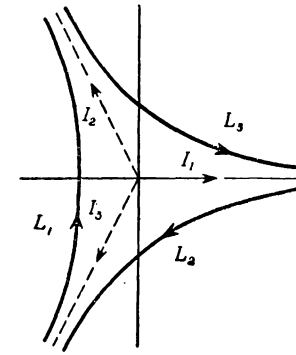

Рис. 61.

17.07. Интеграл Эйри. Рассмотрим интеграл вида

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{tz-{}^1/_3 t^3}\,dt \tag{1}$$

по каждому из трех путей, показанных на рис. 61. Эти интегралы сходятся экспоненциально при условии, что действительная часть t^3 стремится к $+\infty$ на концах путей интегрирования, которые удобно записать в виде $+\infty$, $\infty\exp({}^2/_3\pi i)$, $\infty\exp(-{}^2/_3\pi i)$. Имеем

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z)-zf(z)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{tz-{}^1/_3 t^3}(t^2-z)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int e^{tz-{}^1/_3 t^3}d\left(tz-\frac{1}{3}t^3\right)=0, \tag{2}$$

поскольку в каждом случае $\exp(tz-{}^1/_3 t^3)\to 0$ на обоих пределах. Следовательно, все три интеграла являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-zZ=0. \tag{3}$$

Поскольку это уравнение второго порядка, оно может иметь только два линейно независимых решения, и, значит, между интегралами существует линейное соотношение. Заметим, что интеграл (1), взятый в положительном направлении по любому контуру, охватывающему начало координат, равен нулю, так как подынтегральная функция не имеет особенностей на конечном расстоянии от точки 0. Следовательно, сумма этих трех интегралов, взятых по направлениям, указанным на рисунке, равна нулю.

Возьмем сначала путь L_1 и определим функцию $\mathrm{Ai}(z)$ равенством

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{tz - \frac{1}{3}t^2}\, dt. \tag{4}$$

Эта функция называется интегралом Эйри. Он первый изучил одну из форм такого интеграла в связи с задачей о дифракции волн вблизи каустики. Можно показать (ср. **1.123**), что этот интеграл останется сходящимся, если z — действительное число, а путь L_1 заменен на мнимую ось. Если положить $t = is$, функция $\mathrm{Ai}(z)$ представится в виде

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(sz + {}^1/_3 s^3)}\, ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(sz + {}^1/_3 s^3)\, ds, \tag{5}$$

что с точностью до постоянных множителей и есть та форма, которой пользовался Эйри.

С другой стороны рассмотрим интегралы по полупрямым от 0 до ∞, $\infty \exp \frac{2}{3}\pi i$, $\infty \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)$ и обозначим их соответственно через I_1, I_2, I_2. Тогда

$$I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty \exp {}^2/_3 \pi i} e^{tz - {}^1/_3 t^3}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \exp \frac{2}{3}\pi i \int_0^{\infty} \exp\left(uze^{{}^2/_3 \pi i} - \frac{1}{3}u^3\right) du =$$

$$= \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right) I_1\left(z \exp \frac{2}{3}\pi i\right), \tag{6}$$

$$I_3(z) = \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right) I_1\left[z \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)\right], \tag{7}$$

$$\mathrm{Ai}(z) = I_2(z) - I_3(z). \tag{8}$$

Точно так же

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} = -I_1(z) + I_3(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} = -I_2(z) + I_1(z). \tag{9}$$

Все три решения выражены, таким образом, через единственную функцию $I_1(z)$. Теперь

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{tz-1/3t^3}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-1/3t^3}\sum_{r=0}^\infty \frac{(tz)^r}{r!}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-v}\sum 3^{-2/3}\frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\,v^{1/3r-2/3}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,3^{-2/3}\sum_{r=0}^\infty \frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\left(\frac{1}{3}r-\frac{2}{3}\right)!. \qquad (10)$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i}\exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)3^{-2/3}\sum_{t=0}^\infty \frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\left(\frac{1}{3}r-\frac{2}{3}\right)!\exp\frac{2}{3}\pi ir -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)3^{-2/3}\sum_{r=0}^\infty \frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\left(\frac{1}{3}r-\frac{2}{3}\right)!\exp\left(-\frac{2}{3}\pi ir\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,3^{-2/3}\sum_{r=0}^\infty \frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\left(\frac{1}{3}r-\frac{2}{3}\right)!\sin\left[\frac{2}{3}\pi(r+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,3^{-2/3}\sin\frac{2}{3}\pi\left(-\frac{2}{3}\right)!\left(1+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\frac{z^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\,3^{-1/3}\sin\frac{4}{3}\pi\left(-\frac{1}{3}\right)!\times$$

$$\times\left(z+\frac{z^4}{3\cdot 4}+\frac{z^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\frac{z^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}+\ldots\right). \qquad (11)$$

$\mathrm{Ai}(z)$ представлена, таким образом, в виде суммы двух рядов, сходящихся при всех z; при действительных z эта функция принимает действительные значения. Каждый из этих двух рядов удовлетворяет дифференциальному уравнению (3).

Обозначим числовые коэффициенты, стоящие перед скобками, через α и $-\beta$ и запишем $\mathrm{Ai}(z)$ в виде

$$\mathrm{Ai}(z) = \alpha y_1(z) - \beta y_2(z). \qquad (12)$$

Используя соотношение

$$z!\,(-z)! = \frac{\pi z}{\sin \pi z},$$

находим

$$\alpha = 3^{-2/3}\Big/\left(-\frac{1}{3}\right)!, \quad \beta = 3^{-1/3}\Big/\left(-\frac{2}{3}\right)!.$$

Для второго решения (3), действительного для действительных z, возьмем

$$\begin{aligned}\mathrm{Bi}\,(z) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{L_3} - \int_{L_2}\right) = -iI_2 - iI_3 + 2iI_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi}\,3^{-2/3}\sum \frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\left(\frac{1}{3}r - \frac{2}{3}\right)! \times \\ &\times \left\{2 - \exp\frac{2}{3}(r+1)\,i\pi - \exp\left[-\frac{2}{3}(r+1)\,i\pi\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{\pi}\,3^{-2/3}\sum \frac{(3^{1/3}z)^r}{r!}\left(\frac{1}{3}r - \frac{2}{3}\right)!\left[1 - \cos\frac{2}{3}(r+1)\,\pi\right] = \\ &= \sqrt{3}\,\alpha y_1 + \sqrt{3}\,\beta y_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Сведя I_2 и I_3 к интегралам вдоль мнимой оси, мы будем иметь для действительных z

$$\mathrm{Bi}\,(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{tz - 1/3 t^3} + \sin\left(tz + \frac{1}{3}t^3\right)\right] dt. \tag{14}$$

Ряды, входящие в разложение функций $\mathrm{Ai}\,(z)$, $\mathrm{Bi}\,(z)$, для $|z|>3$ сходятся слишком медленно, чтобы быть удобными для приближенных вычислений. Постараемся получить асимптотическое разложение этих функций методом наискорейшего спуска.

Изучим поведение путей наискорейшего спуска, проходящих через седловую точку, когда z комплексно. Положим $z = r\exp(i\theta)$, $tz - \frac{1}{3}t^3 = f(t)$. Тогда седловые точки — это $P_1\left\{t = t_1 = r^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}\,i\theta\right)\right\}$ и $P_2\left\{t = t_2 = -\,r^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}\,i\theta\right)\right\}$. При этом t_1 имеет положительную, а t_2 — отрицательную действительную часть, если $-\pi < \theta < \pi$. Сначала рассмотрим случай, когда $\theta \geqslant 0$. Имеем

$$\mathrm{Re}\,f(t_2) = -\frac{2}{3}\,r^{3/2}\cos\frac{3}{2}\,\theta, \quad \mathrm{Im}\,f(t_2) = -\frac{2}{3}\,r^{3/2}\sin\frac{3}{2}\,\theta.$$

Путь наискорейшего спуска S_1, проходящий через точку P_1, имеет угол наклона $\pi - \frac{1}{4}\,\theta$, а путь наискорейшего спуска S_2, проходящий через P_2, — угол $^1/_2\pi - {}^1/_4\theta$ к оси x.

Прежде всего найдем асимптотику функции $\mathrm{Ai}\,(z)$, которой соответствует путь интегрирования L_1. Возможны следующие случаи:

1) $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{3}\pi$. Путь S_2 идет из $\infty \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)$ через точку P_2 и далее по направлению к $\infty \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$, оставляя точку P_1 все время с правой стороны; по форме S_2 аналогичен L_1, и, поскольку $\operatorname{Re} f(t_2) < 0$, в этом случае $\operatorname{Ai}(z)$ — экспоненциально *убывающая* функция.

2) $\theta = \frac{1}{3}\pi$. Путь S_2 по-прежнему имеет форму L_1, но $\operatorname{Re} f(t_2) = 0$, и поэтому функция $\operatorname{Ai}(z)$ становится *осциллирующей*.

3) $\frac{1}{3}\pi < \theta < \frac{2}{3}\pi$. Путь S_2 идет из $\infty \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)$ через точку P_2, пересекает асимптоту, идущую к $\infty \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$, а затем уходит в этом же направлении, приближаясь к асимптоте сверху. Как и в первом случае, S_2 оставляет точку P_1 все время справа и имеет форму L_1. Число $\operatorname{Re} f(t_2)$ положительно, и поэтому $\operatorname{Ai}(z)$ экспоненциально *возрастает*.

4) $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Путь S_2 — прямая линия, идущая из $\infty \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)$ через точки P_1 и P_2 и далее к $\infty \exp\left(\frac{1}{3}\pi i\right)$. Путь L_1 до точки P_1 совпадает с S_2, далее поворачивает на прямой угол вдоль S_1 и уходит по направлению $\infty \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$. $\operatorname{Re} f(t_2)$ — отрицательное число, и поэтому вклад в разложение от участка пути вблизи P_1 мал по сравнению с тем, что дает окрестность точки P_2. Функция $\operatorname{Ai}(z)$ экспоненциально возрастает.

5) $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$. Путь S_2 в этом случае идет от $\infty \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)$ к ∞, и, чтобы дополнить его до пути, эквивалентного L_1, мы должны прибавить путь S_1, идущий от ∞ к $\infty \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$ через точку P_1. Вклад в разложение от окрестности точки P_1 экспоненциально убывает, в то время как вклад от окрестности P_2 экспоненциально возрастает; последний и определяет поведение $\operatorname{Ai}(z)$.

6) $\theta = \pi$. Путь L_1 может быть составлен из таких же двух частей, как в (5), но в этом случае $\operatorname{Re} f(t_1) = \operatorname{Re} f(t_2) = 0$, и поэтому обе седловые точки дают сравнимые по величине вклады в разложение. Функция $\operatorname{Ai}(z)$ становится *осциллирующей*.

Несколько первых членов асимптотического разложения, полученных таким способом для $-\pi < \arg z < \pi$ и $\arg z = \pi$, даются формулами (20) и (22).

Изучение интеграла $\operatorname{Bi}(z)$ аналогичным способом несколько более сложно, поскольку здесь приходится рассматривать два

пути L_2 и L_3. Полагая, однако, $t=\tau\exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)$, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_3} e^{tz-{}^1/_3t^3}dt=\frac{1}{2\pi i}\exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)\int\limits_{L_1} e^{\tau z\exp(-{}^2/_3\pi i)-\frac{1}{3}\tau^3}d\tau=$$

$$=\exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)\mathrm{Ai}\left[z\exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)\right]. \qquad (15)$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} e^{tz-\frac{1}{3}t^3}dt=\exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)\mathrm{Ai}\left[z\exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)\right]. \qquad (16)$$

Формула (20) даст правильную аппроксимацию как для (15), так и для (16) при условии, что $\arg z$ меняется в пределах

$$-\frac{1}{3}\pi<\arg z<\frac{1}{3}\pi.$$

В этой области разложение дается формулой (21).

Если бы это разложение было справедливо и вне данной области изменения $\arg z$, то отсюда следовало бы, что для некоторых значений $\arg z$ функция $\mathrm{Bi}\,(z)$ экспоненциально мала. Это, однако, не так; в действительности $\mathrm{Bi}\,(z)$ экспоненциально велика для всех значений $\arg z$, кроме таких, при которых она становится осциллирующей. Чтобы убедиться в этом и получить асимптотическое разложение для остальных значений $\arg z$, воспользуемся следующими тождествами:

$$\mathrm{Ai}\,(ze^{{}^2/_3k\pi i})=e^{{}^1/_3k\pi i}\left(\cos\frac{1}{3}k\pi\,\mathrm{Ai}\,(z)-\frac{i}{\sqrt{3}}\sin\frac{1}{3}k\pi\,\mathrm{Bi}\,(z)\right), \qquad (17)$$

$$\mathrm{Bi}\,(ze^{{}^2/_3k\pi i})=e^{{}^1/_3k\pi i}\left(-\sqrt{3}\,i\sin\frac{1}{3}k\pi\,\mathrm{Ai}\,(z)+\cos\frac{1}{3}k\pi\,\mathrm{Bi}\,(z)\right), \qquad (18)$$

$$\frac{i}{\sqrt{3}}\sin\frac{1}{3}k\pi\,\mathrm{Bi}\,(z)=e^{{}^1/_3k\pi i}\,\mathrm{Ai}\,(ze^{-{}^2/_3k\pi i})-\cos\frac{1}{3}k\pi\,\mathrm{Ai}\,(z), \qquad (19)$$

где k — положительное или отрицательное целое число.

Из последнего тождества при $k=\pm 1$ следует, что если $|\arg z|=\frac{1}{3}\pi$ или π, то $\mathrm{Bi}\,(z)$ функция осциллирующая, а при всех других значениях $\arg z$ один из членов правой части (19) экспоненциально возрастает. В частности, если $\arg z=\pi$ и $z=\zeta e^{i\pi}$, то мы имеем разложения (22), (23).

Итак, суммируем результаты:

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right)\left(1 - \frac{1\cdot 5}{1!\,48} z^{-3/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 7\cdot 5\cdot 11}{2!\,48^2} z^{-3} - \frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 11\cdot 17}{3!\,48^3} z^{-9/2} + \ldots\right), \quad (20)$$

если $-\pi < \arg z < \pi$;

$$\mathrm{Bi}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right)\left(1 + \frac{1\cdot 5}{1!\,48} z^{-3/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 7\cdot 5\cdot 11}{2!\,48^2} z^{-3} + \frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 11\cdot 17}{3!\,48^3} z^{-9/2} + \ldots\right), \quad (21)$$

если $-\frac{1}{3}\pi < \arg z < \frac{1}{3}\pi$.

В случае, когда $\arg z = \pi$, полагая $z = \zeta e^{\pi i}$, получим

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta^{-1/4}\left[P(\zeta)\sin\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right) - Q(\zeta)\cos\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right)\right], \quad (22)$$

$$\mathrm{Bi}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta^{-1/4}\left[P(\zeta)\cos\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right) + Q(\zeta)\sin\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right)\right], \quad (23)$$

где

$$P(\zeta) \sim 1 - \frac{1\cdot 7\cdot 5\cdot 11}{2!\,48^2}\zeta^{-3} + \frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 5\cdot 11\cdot 17\cdot 23}{4!\,48^4}\zeta^{-6} - \ldots, \quad (24)$$

$$Q(\zeta) \sim \frac{1\cdot 5}{1!\,48}\zeta^{-3/2} - \frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 11\cdot 17}{3!\,48^3}\zeta^{-9/12} + \ldots. \quad (25)$$

Вторые члены здесь составляют приблизительно $1/10$ от первых даже при $|z| = 1$.

Рассмотренные выше специальные функции $\mathrm{Ai}(z)$ и $\mathrm{Bi}(z)$ были выбраны как фундаментальные решения уравнения (3), одно из которых экспоненциально убывает вдоль положительной действительной оси; на отрицательной действительной оси они имеют для больших z одинаковые амплитуды, отличаясь на $\frac{1}{2}\pi$ по фазе.

Линейная комбинация рядов, стоящих в правых частях (20) и (21), представляет собой асимптотическое разложение некоторого уравнения (3), однако оно не является асимптотикой этого же решения при всех значениях $\arg z$. Это явление, открытое Стоксом, известно как разрывность произвольных постоянных в асимптотических разложениях. Оно является иллюстрацией к теореме **17.023**, согласно которой асимптотическое разложение, не будучи сходящимся рядом, не может быть справедливо одновременно для всех значений $\arg z$.

17.08. Дисперсия: фазовая и групповая скорости. Рассмотрим непрерывную динамическую систему (сплошную среду), в которой вдоль оси x распространяются волны; пусть длина волны $2\pi/\varkappa$ соответствует периоду $2\pi/\gamma$. Если начальное возмущение ζ_0 равно единице при $-h<x<h$ и нулю для всех остальных x, то мы можем представить его в виде $H(x+h)-H(x-h)$, или в форме интеграла Фурье:

$$\zeta_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \varkappa h \cos \varkappa x \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \tag{1}$$

Начальную скорость возмущения также можно было бы выразить через интеграл Фурье; пусть, однако, она будет равна нулю. Таким образом, мы имеем задачу о распространении волн от первоначально возмущенной области. Например, наша система может быть длинным каналом, наполненным водой, а начальное возмущение — повышением или понижением поверхности воды в результате удара твердым телом.

Изменение уровня для последующих моментов времени будет равно

$$\zeta=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \varkappa h \cos \varkappa x \cos \gamma t \frac{d\varkappa}{\varkappa}. \tag{2}$$

Мы пренебрегаем здесь дополнительными осложнениями, возникающими за счет влияния концов; таким образом, будем изучать задачу, где все определяется лишь начальным возмущением. Подынтегральную функцию в (2) можно разбить на несколько слагаемых следующим образом:

$$\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\sin(\gamma t-\varkappa x+\varkappa h)-\sin(\gamma t-\varkappa x-\varkappa h)+$$
$$+\sin(\gamma t+\varkappa x+\varkappa h)-\sin(\gamma t+\varkappa x-\varkappa h)]\frac{d\varkappa}{\varkappa}. \tag{3}$$

Если бы γ было пропорционально $\varkappa$, мы имели бы систему, в которой волны любой длины распространяются с одинаковой скоростью, и тогда первый и второй члены (3) представляли бы собой волны, идущие в положительном направлении оси x, а третий и четвертый — в отрицательном. Волны, представленные первым и четвертым членами, как бы начинают движение от точки $x=h$, остальные — от точки $x=-h$. Мы рассмотрим здесь случай, когда γ не пропорционально $\varkappa$; иными словами, фазовая скорость зависит от длины волны. Пусть γ будет нечетной функцией от $\varkappa$, действительной для действительных

значений $\varkappa$. Изучение всех четырех членов (3) проводится одинаково, и поэтому мы можем сосредоточить наше внимание лишь на первом из них. Возьмем

$$\zeta_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_0^\infty \left[e^{i(\gamma t-\varkappa x+\varkappa h)} - e^{-i(\gamma t-\varkappa x+\varkappa h)}\right]\frac{d\varkappa}{\varkappa} = \\ = \frac{1}{4\pi i} P\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma t-\varkappa x+\varkappa h)}\frac{d\varkappa}{\varkappa}. \qquad (4)$$

В этой формуле h входит лишь в комбинации $x-h$; в дальнейшем мы можем h опустить, считая, что волны начинают движение из точки $x=0$, а когда понадобится — вновь восстановить его. Мы можем также временно опустить индекс у ζ_1. В приложениях оба числа x и t бывают достаточно велики; мы найдем аппроксимацию для больших t, считая, что отношение x/t фиксировано. Тогда

$$f(\varkappa) = i(\gamma - \varkappa x/t), \qquad (5)$$

и в седловой точке

$$f'(\varkappa) = i(\gamma' - x/t) = 0; \quad f''(\varkappa) = i\gamma'', \qquad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по $\varkappa$. Отсюда видно, что главную роль в этом методе играет производная $d\gamma/d\varkappa$, которая называется *групповой скоростью*. Фазовая скорость, с которой движутся волны, если все они имеют одинаковую длину, равна $\gamma/\varkappa$; но мы уже видели, что представление локального возмущения интегралом Фурье автоматически вводит все возможные длины волн и, значит, остается только посмотреть, появится ли в явном виде фазовая скорость. Ниже мы увидим, что это действительно имеет место. Соотношения между групповой и фазовой скоростями можно получить, если положить $\gamma/\varkappa = c$, $d\gamma/d\varkappa = C$. Тогда

$$C = \frac{d}{d\varkappa}(\varkappa c) = \varkappa\frac{dc}{d\varkappa} + c = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}, \qquad (7)$$

где вместо $\varkappa$ вводится длина волны $\lambda = 2\pi/\varkappa$; результат, правда, гораздо проще выразить через $\varkappa$. Приравнивая правую часть равенства (5) нулю, получаем уравнение, определяющее $\varkappa$ как функцию от x/t. Пусть это значение будет $\varkappa_0$; здесь мы предполагаем, что оно действительно. Поскольку γ' есть четная функция от $\varkappa$, то если $\varkappa_0$ — один (положительный) корень, то $-\varkappa_0$ — другой корень. Мы также предполагаем, что γ не принимает бесконечных значений, если $\varkappa$ — любое действительное число, так что подынтегральная функция в (4) не имеет на

действительной оси других особенностей, кроме полюса в точке $\varkappa = 0$. Этот полюс не влияет на значение ζ, поскольку остальные три части подынтегральной функции (3) также имеют полюса в нуле с вычетами ± 1, и поэтому суммарный эффект равен нулю, какой бы путь интегрирования мы ни взяли.

Заметим, что $f''(\varkappa_0)$ — чисто мнимое число и γ'' имеет противоположные знаки в точках $\varkappa_0$ и $-\varkappa_0$. Если γ'' в точке $\varkappa_0$ положительно, путь наискорейшего спуска, проходящий через $\varkappa_0$, пересечет действительную ось в направлении $^1/_4\,\pi$, путь, проходящий через $-\varkappa_0$, — в направлении $-^1/_4\pi$. Если же γ'' отрицательно, то эти направления нужно поменять местами. Тогда в первом случае вклад, который дает путь, проходящий через $\varkappa_0$, в первый член асимптотического разложения, будет равен

$$\frac{1}{4\pi i}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\varkappa_0}\,\frac{\exp i\,(\gamma_0 t - \varkappa_0 x)}{[t\gamma''(\varkappa_0)]^{1/2}}\,e^{1/4\pi i}. \tag{8}$$

Путь через $-\varkappa_0$ дает

$$-\frac{1}{4\pi i}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\varkappa_0}\,\frac{\exp\left[-i\,(\gamma_0 t - \varkappa_0 x)\right]}{[t\gamma''(\varkappa_0)]^{1/2}}\,e^{-1/4\pi i}. \tag{9}$$

Здесь знак изменен на обратный, кроме того, следует помнить, что именно $|\gamma''(-\varkappa_0)|$ должен быть в знаменателе; значение аргумента обеспечивается последним сомножителем.

Объединяя оба результата, получим:

$$\zeta \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{t\gamma_0''}\,\varkappa_0}\sin\left(\gamma_0 t - \varkappa_0 x + \frac{1}{4}\,\pi\right). \tag{10}$$

Если γ_0'' отрицательно, мы берем в знаменателе опять величину $|\gamma_0''|$, но меняем знаки на противоположные у экспонент с показателями $\pm^1/_4\pi i$. Тогда в обоих случаях

$$\zeta \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{|t\gamma_0''|}\,\varkappa_0}\sin\left[\gamma_0 t - \varkappa_0 x - \frac{1}{4}\,\pi\,\operatorname{sgn}\gamma''(\varkappa_0)\right]. \tag{11}$$

Разность фаз в этих двух случаях равна $^1/_2\pi$ в соответствии с тем, возрастает или убывает групповая скорость при увеличении $\varkappa$.

Возьмем теперь угол

$$\theta = \gamma_0 t - \varkappa_0 x \tag{12}$$

и посмотрим, как он меняется при изменении x и t, помня, что $\varkappa_0$ и, следовательно, γ_0 являются функциями от x/t, определенными при помощи (5):

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = t\,\frac{d\gamma_0}{d\varkappa_0}\,\frac{\partial\varkappa_0}{\partial x} - \varkappa_0 - \frac{\partial\varkappa_0}{\partial x}\,x. \tag{13}$$

Но согласно (6), $t\frac{d\gamma_0}{d\varkappa_0}-x=0$; поэтому члены, содержащие $\partial\varkappa_0/\partial x$, взаимно уничтожаются и $\partial\theta/\partial x=-\varkappa_0$.

На отрезке $2\pi/\varkappa_0$ фаза меняется на 2π; значит, $2\pi/\varkappa_0$ *есть длина тех волн, которые проходят точку, находящуюся на расстоянии* x *в момент времени* t. Аналогично

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\gamma_0+t\frac{d\gamma_0}{d\varkappa_0}\frac{\partial\varkappa_0}{\partial t}-x\frac{\partial\varkappa_0}{\partial t}=\gamma_0. \tag{14}$$

Следовательно, $2\pi/\gamma_0$ *есть период волн, проходящих через точку, находящуюся на расстоянии* x *в момент времени* t. *И тогда* $\gamma_0/\varkappa_0$ *есть скорость волн, проходящих через точку, находящуюся на расстоянии* x *в момент времени* t в том смысле, что если мы будем и дальше двигаться с той же скоростью, то относительно ближайшего гребня или впадины наше положение будет одним и тем же. Таким образом, скорость индивидуальной волны — это фазовая скорость, соответствующая ее длине.

Однако мы не можем отсюда заключить, что каждая волна движется с постоянной скоростью. Действительно, если γ не пропорционально $\varkappa$, то C не равно $\gamma/\varkappa$; поэтому если мы возьмем точку, которая движется со скоростью c, то там, где она будет через некоторое время, отношение x/t будет другим, нежели в том месте и в тот момент времени, когда точка начала свое движение; различными будут значения C, следовательно, локальные значения γ, $\varkappa$ и c также будут различными.

Мы можем рассматривать отдельную волну, которая движется со скоростью c, зависящей от ее длины в данный момент времени; но по мере движения период, длина волны и ее скорость будут изменяться. С другой стороны, если мы движемся так, что отношение x/t постоянно, мы всегда сохраним постоянной величину C и, следовательно, величины $\varkappa$, γ и c; но волна не будет уже одна и та же, поскольку $c\neq C$.

Таким образом, *периоды, длины волн, фазовые скорости* распространяются *с групповой скоростью; отдельные волны движутся с локальной фазовой скоростью, но их периоды, длины и фазовые скорости изменяются во время движения.*

Энергия, в определенном смысле, также распространяется с групповой скоростью. Рассмотрим две точки, которые начинают двигаться от $x=0$ в момент $t=0$ со скоростями C_1, C_2. Энергия, соответствующая смещениям между этими точками в момент времени t, пропорциональна

$$\int_{C_1t}^{C_2t}\zeta^2\,dx\sim\int_{C_1t}^{C_2t}\frac{1}{2\pi(t\gamma_0'')\varkappa_0^2}\sin^2\left(\gamma_0t-\varkappa_0x\pm\frac{1}{4}\pi\right)dx \tag{15}$$

при условии, что между $x = C_1 t$ и $x = C_2 t$ находятся несколько волн. Но для каждой волны мы можем взять среднее значение $\sin^2\left(\gamma_0 t - \varkappa_0 x \pm \frac{1}{4}\pi\right)$, поскольку отдельные волны близки к гармоническим. Тогда выражение (15) приблизительно равно

$$\int_{C_1 t}^{C_2 t} \frac{1}{4\pi t \gamma_0'' \varkappa_0^2}\, dx = \int_{C_1}^{C_2} \frac{dC}{4\pi \gamma_0'' \varkappa_0^2}, \tag{16}$$

если положить здесь $x = Ct$. Но γ_0'' и $\varkappa_0^2$ являются функциями только одного C; следовательно, *энергия, заключенная между двумя точками волны, движущимися с постоянными скоростями, начиная от начала координат, не зависит от времени*; скорости движения этих точек являются локальными групповыми скоростями.

Все эти результаты могут служить аппроксимацией к истинному решению лишь при условии, что мы можем ограничиться первым членом асимптотического разложения ζ. Обычно это выполняется; позже мы увидим, что если это не так, то локальное движение в окрестности какой-либо точки даже приближенно не является простым гармоническим колебанием. Поскольку разложение производилось по отрицательным степеням t, точность аппроксимации увеличивается по мере продвижения вперед цуга волн.

В формуле (15) длины волн, содержащихся между точками $x = C_1 t$ и $C_2 t$, остаются все время постоянными, а расстояние между точками увеличивается, следовательно, число волн растет пропорционально t. Первоначальное возмущение может сначала дать одну волну, но по мере продвижения вперед эта волна превращается в цуг волн, который становится длиннее и длиннее.

Может случиться так, что для некоторых значений x/t не существует действительных $\varkappa$, удовлетворяющих (6). В этом случае наилучший образ действий — это искать седловую точку вне действительной оси. Тогда экспонента, входящая в выражение (4), будет иметь действительную часть, которая со временем численно возрастает.

Если эта действительная часть положительна, то в физической системе это соответствует постоянно увеличивающейся энергии. Поскольку это невозможно, экспонента должна иметь отрицательную действительную часть. Комплексные корни уравнения (6) соответствуют тем местам, где имеется небольшое возмущение, которое не аппроксимируется простыми гармониками. Действительная групповая скорость может иметь минимум или максимум; в первом случае внутри некоторого интервала около начала будет небольшое движение, увеличивающееся

со временем, во втором случае это движение будет наблюдаться вне соответствующего интервала. Поскольку существование минимума или максимума групповой скорости влечет за собой обращение в нуль γ'' и, следовательно, знаменателя нашего приближенного решения, мы можем заключить, что вблизи начала или конца такого цуга амплитуда будет большой. Поблизости от начала ($t = 0$) нельзя применять метод в его настоящем виде, поскольку справедливость его существенно зависит от того, так ли велико значение $\gamma_0'' t$, чтобы можно было отбросить последующие члены разложения. Для дальнейшего рассмотрения этого вопроса потребуются члены, содержащие третью степень в экспоненте, что приводит к интегралу Эйри.

17.09. Дисперсия волн на воде. Все рассуждения разд. **17.07** и **17.08** можно применить к теории распространения волн на воде с учетом капиллярности и силы тяжести. Фазовая скорость как функция от $\varkappa$ имеет вид

$$c^2 = \left(\frac{g}{\varkappa} + T'\varkappa\right) \operatorname{th} \varkappa H, \tag{1}$$

где $T'\rho$ — поверхностное натяжение (ρ — плотность), а H — глубина бассейна. Если мы выберем такое решение, которое переходит при малом $\varkappa$ в $(gH)^{1/2}$, то c будет однозначной функцией от $\varkappa$. Тогда

$$\gamma^2 = (g\varkappa + T'\varkappa^3) \operatorname{th} \varkappa H, \tag{2}$$

где γ ведет себя как $(gH)^{1/2}\varkappa$ при малых $\varkappa$ и как $(T'\varkappa^3)^{1/2}$ при больших $\varkappa$. Групповая скорость C стремится, следовательно, к $(gH)^{1/2}$ при малых $\varkappa$ и к $+\infty$ при больших $\varkappa$.

Удерживая члены второго порядка малости для малых $\varkappa$, имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= (gH)^{1/2}\varkappa\left(1 - \frac{1}{6}\varkappa^2 H^2 + \frac{1}{2}\frac{T'\varkappa^2}{g}\right), \\ C &= (gH)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{2}\varkappa^2 H^2 + \frac{3}{2}\frac{T'\varkappa^2}{g}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Если $T'/g < \frac{1}{3}H^2$, то C будет меньше $(gH)^{1/2}$ для малых $\varkappa$. Это будет выполняться, если глубина больше 0,5 *см*; для меньших глубин необходимо принять во внимание вязкость.

Будем предполагать, что H значительно больше 1 *см*. Когда $\varkappa$ начинает увеличиваться от нуля, C будет сначала уменьшаться, но для достаточно больших $\varkappa$ оно снова растет и, следовательно, при некотором промежуточном значении $\varkappa$ будет иметь минимум. Существование минимума фазовой скорости распространения

капиллярно-гравитирующих волн хорошо известно, несколько менее известно существование минимума групповой скорости; этот минимум оказывает влияние на дисперсию волн. В заданный момент времени вблизи начала имеется зона спокойной воды, простирающаяся до расстояния, куда могут прийти волны, двигающиеся с минимальной групповой скоростью. На бо́льших расстояниях будут волны, двигающиеся с некоторой групповой скоростью и имеющие две характерные длины: более короткие, определяемые преимущественно капиллярностью, и более длинные, определяемые силой тяжести. На расстоянии, большем $(gH)^{1/2}t$, гравитационных волн уже не будет, но, возможно, будут капиллярные волны.

Если глубина достаточно велика, мы можем положить $\operatorname{th}\varkappa H = 1$ для всех волн, кроме самых длинных; тогда

$$\gamma = (g\varkappa + T'\varkappa^3)^{1/2}, \tag{4}$$

$$C = \frac{g + 3T'\varkappa^2}{2(g\varkappa + T'\varkappa^3)^{1/2}}, \tag{5}$$

$$\frac{dC}{d\varkappa} = \frac{3T'\varkappa}{(g\varkappa + T'\varkappa^3)^{1/2}} - \frac{(g + 3T'\varkappa^2)^2}{4(g\varkappa + T'\varkappa^3)^{3/2}}, \tag{6}$$

и минимум групповой скорости соответствует

$$\varkappa^2 = \frac{g}{T'}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right). \tag{7}$$

Если ввести минимум фазовой скорости c_0, который определяется из условия

$$c_0^2 = 2(gT')^{1/2}, \tag{8}$$

и соответствующую длину волны, которая определяется из условия

$$\varkappa_0^2 T' = g, \tag{9}$$

то для минимума групповой скорости мы получим следующие соотношения:

$$\varkappa = 0{,}393\varkappa_0, \quad C = 0{,}767c_0, \quad c = 1{,}212c_0, \tag{10}$$

$$\frac{d^2C}{d\varkappa^2} = 0{,}371\,\frac{c_0^5}{g^2}. \tag{11}$$

Наименьшая фазовая скорость распространения волн на воде равна 23 *см/сек*; соответствующая длина волны 1,8 *см*. Следовательно, минимум групповой скорости равен 18 *см/сек*, соответствующая фазовая скорость равна 28 *см/сек*, а длина волны 4,6 *см*.

Приближение $\operatorname{th}\varkappa H = 1$ справедливо поэтому для волн, обладающих минимальной групповой скоростью, или для более коротких волн при условии, что глубина больше 5 *см*.

Рассмотрим сначала случай, когда глубина очень большая, а x/t мало по сравнению с $(gH)^{1/2}$, но велико по сравнению с минимумом групповой скорости.

Тогда мы можем написать

$$\gamma = (g\varkappa)^{1/2}, \quad c = (g/\varkappa)^{1/2}, \quad C = \frac{1}{2}(g/\varkappa)^{1/2}, \quad \frac{dC}{d\varkappa} = -\frac{1}{4}(g/\varkappa^3)^{1/2} \tag{12}$$

и, согласно **17.08** (11) ($\varkappa_0$ определяется так же, как в **17.08**),

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}\,(g/\varkappa_0^3)^{1/4}\varkappa_0}\sin\left(\gamma_0 t - \varkappa_0 x - \frac{1}{4}\pi\right), \tag{13}$$

где

$$\frac{x}{t} = C = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varkappa_0}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Таким образом,

$$\zeta \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, g^{-1/4}\varkappa_0^{-1/4}\sin\left(\gamma_0 t - \varkappa_0 x - \frac{1}{4}\pi\right), \tag{15}$$

и амплитуда уменьшается к концу цуга как $x^{1/2}$.

Этот результат должен быть видоизменен, если мы вернемся к **17.08** (3), так как волновой цуг, который мы только что рассмотрели, одиночен и начинает свое движение из точки $x = 0$. На самом деле будет происходить наложение двух цугов волн, один из которых начинает движение из точки $x = h$, а другой из точки $x = -h$. Если длина волны превышает $2h$, то мы можем только ими и ограничиться, и тогда полное решение составляет приблизительно $-2h\partial/\partial x$ от только что найденного. По этому решению амплитуда будет возрастать к концу цуга как $x^{-3/2}$. Таким образом, поведение цуга волн сильно зависит от вида начального возмущения. Например, всплеск от брошенного в воду камня соответствует величине $2h$ порядка 10 *см*. Амплитуды волн небольшой длины ($< 2h$) будут убывать к концу цуга, а амплитуды более длинных волн будут возрастать. Следовательно, найдется длина волны, соответствующая максимальной амплитуде, которая определяется главным образом размером начального возмущения. С другой стороны, дождевая капля или выпрыгивающая из воды рыба дадут начальное возмущение, размер которого порядка 1 *см*, и поэтому амплитуда гравитационных волн будет всегда возрастать к концу цуга.

Рассмотрим теперь капиллярные волны. В этом случае мы будем иметь

$$\gamma = (T'\varkappa^3)^{1/2}, \quad c = (T'\varkappa)^{1/2}, \quad C = \frac{3}{2}(T'\varkappa)^{1/2}, \quad \frac{dC}{d\varkappa} = \frac{3}{4}(T'/\varkappa)^{1/2}, \tag{16}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}\pi t\,(T'/\varkappa_0)^{1/4}\varkappa_0}} \sin\left(\gamma_0 t - \varkappa_0 x + \frac{1}{4}\pi\right), \tag{17}$$

где

$$\frac{3}{2}(T'/\varkappa_0)^{1/2} = \frac{x}{t}. \tag{18}$$

В заданный момент времени амплитуда, грубо говоря, пропорциональна $x^{-3/2}$.

Таким образом, даже без учета эффекта вязкости, который для таких коротких волн значителен, амплитуды этих волн будут очень быстро затухать в направлении фронта цуга.

Остаются два исключения: именно, когда групповая скорость близка к $(gH)^{1/2}$ или к своему минимуму. Обычная формула, найденная методом наискорейшего спуска, зависит от того, достаточно ли велико значение $f''(z)$, чтобы можно было заменить выражение $\exp tf(z)$ на $\exp tf(z_0)\exp\left[\frac{1}{2}tf''(z_0)(z-z_0)^2\right]$; это возможно, пока $f(z)$ мало по сравнению с его значением в седловой точке. Если $f''(z_0) \neq 0$, то для этого необходимо взять t достаточно большим. Если же $f''(z_0) = 0$, поведение подынтегральной функции зависит от членов $f'''(z_0)(z-z_0)^3$, и метод в своем простейшем виде не проходит. Вблизи тех значений z, где $f''(z) = 0$, аппроксимация не будет хорошей, если только t немного больше таких значений, которые обеспечивают хорошую аппроксимацию уже повсюду. Мы можем тем не менее получить полезные решения, используя интеграл Эйри.

Рассмотрим сначала самые длинные волны. Поскольку при этом определяющее значение имеют горизонтальные размеры, мы можем (для волн конца цуга) применить оператор $-2h\partial/\partial x$ к **17.08** (4). Тогда из формулы **17.09** (3) следует, что

$$\zeta = \frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma t - \varkappa x)}\,d\varkappa \sim \frac{h}{\pi}\cos\left[(gH)^{1/2}\varkappa t\left(1 - \frac{1}{6}\varkappa^2 H^2\right) - \varkappa x\right]d\varkappa =$$

$$= \frac{h}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left[\varkappa x - (gH)^{1/2}\varkappa t + \frac{1}{6}(gH)^{1/2} tH^2\varkappa^3\right]d\varkappa. \tag{19}$$

Положим

$$(gH)^{1/2} = \alpha, \quad z^3 = \frac{2(x-\alpha t)^3}{\alpha t H^2}, \quad \varkappa = \frac{zs}{x-\alpha t}. \tag{20}$$

Тогда

$$\zeta \sim \frac{hz}{\pi(x-\alpha t)} \int_0^\infty \cos\left(sz + \frac{1}{3}s^3\right) ds = h\left(\frac{2}{\alpha t H^2}\right)^{1/3} \mathrm{Ai}\left[\frac{2(x-\alpha t)^3}{\alpha t H^2}\right]^{1/3}. \tag{21}$$

В точках, где $x = \alpha t$, амплитуда уменьшается со временем как $t^{-1/3}$, а не как $t^{-1/2}$, как это происходит там, где групповая скорость ведет себя обычным образом. Фронт гравитационной волны поэтому приобретает постепенно наиболее характерные черты первоначального возмущения.

Интеграл Эйри уменьшается в направлении положительного значения аргумента, и поэтому возмущение при значениях x больше αt быстро затухает и сглаживается.

Наибольшее поднятие уровня воды наблюдается немного позади того места, где $x = \alpha t$, и сопровождается цугом волн, становящихся все меньше и короче.

Если отношение x/t близко к минимуму групповой скорости, а h много меньше соответствующей длины волны, то

$$\zeta \doteqdot \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma t - \varkappa x)} d\varkappa = \frac{h}{\pi} \int_0^\infty \cos(\gamma t - \varkappa x)\, d\varkappa. \tag{22}$$

Пусть величина с индексом m соответствует стационарному значению групповой скорости. Для положительных значений $\varkappa_m$ положим

$$\varkappa = \varkappa_m + \varkappa_1, \quad \gamma \doteqdot \varkappa_m c_m + C_m \varkappa_1 + \frac{1}{6} C_m'' \varkappa_1^3. \tag{23}$$

Тогда

$$\gamma t - \varkappa x \doteqdot \varkappa_m (c_m t - x) + \varkappa_1 (C_m t - x) + \frac{1}{6} \varkappa_1^3 C_m'' t. \tag{24}$$

Седловые точки находятся вблизи $\varkappa_1 = \pm[2(x/t - C_m)/C_m'']^{-1/2}$. Пусть x/t таково, что $\varkappa_1$ мало; возьмем круг радиуса $|\varkappa_1| = \mathrm{const}$, такой, что обе седловые точки лежат внутри него. Если пренебречь интегралом по пути, лежащему вне круга, то ошибка будет порядка $O(1/t)$, а путь, лежащий внутри круга, мы можем изменить так, чтобы он прошел через точку $\varkappa_1 = 0$.

Тогда

$$\zeta \sim \frac{h}{2\pi} \cos \varkappa_m (c_m t - x) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[\varkappa_1 (C_m t - x) + \frac{1}{6} \varkappa_1^3 C_m'' t \right] d\varkappa_1 -$$

$$- \frac{h}{2\pi} \sin \varkappa_m (c_m t - x) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left[\varkappa_1 (C_m t - x) + \frac{1}{6} \varkappa_1^3 C_m'' t \right] d\varkappa_1. \qquad (25)$$

Второй интеграл равен нулю; следовательно,

$$\zeta \sim 2h \left(\frac{1}{C_m'' t} \right)^{1/3} \cos \varkappa_m (c_m t - x) \operatorname{Ai} \left[\left(\frac{2}{C_m'' t} \right)^{1/3} (C_m t - x) \right]. \qquad (26)$$

Легко показать, что ошибка от пренебрежения величинами C_m''' и $C_m^{(4)}$ на дуге $\varkappa_1$, на которой величина $\varkappa_1^3 C_m'' t$ становится большой, порядка $t^{-2/3}$ от главного члена; следовательно, в разложении (26) ошибка будет порядка $1/t$. Для больших t последний сомножитель в (26) из-за присутствия малого множителя $t^{-1/3}$ в его аргументе меняется с изменением x гораздо медленнее косинуса.

Следовательно, общую картину можно представить себе как ряд волн с длинами $2\pi/\varkappa_m$ и периодами $2\pi/\varkappa_m c_m$, но с амплитудами, затухающими экспоненциально при $x < C_m t$ и медленно осциллирующими при $x > C_m t$.

Наиболее характерная особенность — это кольцо волн, определяющее область спокойной воды, с длинами, соответствующими минимуму групповой скорости.

17.10. Гармонический цуг волн конечной продолжительности. В прямых измерениях скорости света или звука непрерывный цуг волн, который можно считать гармоническим, разбивается на одинаковые отрезки при помощи зубчатого колеса или вращающегося зеркала, в результате чего получается ряд вспышек. При этом необходимо измерить время, в течение которого вспышка, отразившись, вернется назад и зафиксируется вращающимся механизмом вблизи нашего глаза или уха. На этот эксперимент не влияет время движения какой-либо отдельной волны; все зависит лишь от изменения интенсивности. Для простейшего описания этого явления нужно рассмотреть цуг волн с биениями, так что возмущение может быть выражено в виде

$$\zeta = \cos \gamma_0 t \cos \frac{1}{2} \pi t/k = \frac{1}{2} \cos \left(\gamma_0 - \frac{\pi}{2k} \right) t + \frac{1}{2} \cos \left(\gamma_0 + \frac{\pi}{2k} \right) t. \qquad (1)$$

Возмущение имеет период $2\pi/\gamma_0$, но амплитуда его обращается в нуль во всех случаях, когда t равно нечетному числу, умноженному на k. В следующем биении фаза меняется на обратную. Предположим теперь, что $\varkappa_0 = \gamma_0/c_0$ для длины волны $2\pi/\varkappa_0$ с периодом $2\pi/\gamma_0$, а для близлежащих периодов $\varkappa_0$ удовлетворяет уравнению

$$\varkappa_0 + \frac{\partial \varkappa}{\partial \gamma}\delta\gamma = \varkappa_0 + \frac{1}{C}\delta\gamma.$$

Тогда возмущение на расстоянии x будет равно

$$\zeta = \frac{1}{2}\cos\left[\left(\gamma_0 - \frac{\pi}{2k}\right)t - \left(\varkappa_0 - \frac{\pi}{2kC}\right)x\right] + \frac{1}{2}\cos\left[\left(\gamma_0 + \frac{\pi}{2k}\right)t - \right.$$
$$\left. - \left(\varkappa_0 + \frac{\pi}{2kC}\right)x\right] = \cos(\gamma_0 t - \varkappa_0 x)\cos\frac{\pi}{2k}\left(t - \frac{x}{C}\right). \quad (2)$$

Поскольку $\gamma_0 = \varkappa_0 c_0$, первый сомножитель показывает, что фазы движутся с волновой скоростью c_0, а второй сомножитель показывает, что биения движутся с групповой скоростью $d\gamma/d\varkappa = C$. Следовательно, подобные эксперименты определяют лишь групповую скорость, связанную с периодом $2\pi/\gamma_0$, но не фазовую скорость.

17.11. Преломление импульса. Предположим, что в точке O в одной среде возникло мгновенное возмущение, которое частично передается во вторую среду, где скорость распространения волн отлична от первой. Обе среды будем считать диспергирующими, т. е. скорость распространения в них зависит от длины волны. Допустим, что возмущение во второй среде наблюдается в точке P; его можно рассматривать как результат отдельных возмущений, приходящих из разных точек Q границы между обеими средами. Тогда множитель, содержащий время, в выражении для возмущения в точке P равен

$$\exp i(\gamma t - \varkappa_1 s_1 - \varkappa_2 s_2), \quad (1)$$

где s_1 и s_2 — расстояния от точек O и P до Q, а $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ соответствуют значениям γ в обеих средах. Пусть точка Q находится на расстоянии s по границе от некоторой фиксированной точки. Тогда главная часть возмущения в точке P при переменных γ и s может быть найдена из условия, что множитель (1) стационарен по γ и s, если фиксировать как t, так и положение P. Это дает следующие соотношения:

$$\varkappa_1 \frac{ds_1}{ds} + \varkappa_2 \frac{ds_2}{ds} = 0, \quad (2)$$

$$t - s_1 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial \gamma} - s_2 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial \gamma} = 0. \quad (3)$$

Вводя для каждой среды фазовую и групповую скорости, мы получаем, что эти соотношения эквивалентны следующим:

$$\frac{1}{c_1}\frac{ds_1}{ds}+\frac{1}{c_2}\frac{ds_2}{ds}=0, \tag{4}$$

$$\frac{s_1}{C_1}+\frac{s_2}{C_2}=t. \tag{5}$$

Первое из этих соотношений — обычный закон преломления, эффективные значения s располагаются вокруг такого значения, при котором время прохождения от точки O до точки P стационарно для волн, движущихся с фазовой скоростью. Таким образом, направления движения волн определяются фазовой скоростью. Второе соотношение показывает, что преобладающий период определяется групповой скоростью; действительно, это уравнение соответствует $x/t=C$, из которого определяется преобладающий период при простой дисперсии. Таким образом, преломление волн в диспергирующих средах является довольно сложным явлением, при котором линии постоянной фазы, вообще говоря, наклонены под некоторым углом к линиям постоянного периода [4].

17.12. Асимптотические решения дифференциальных уравнений. Имеется несколько типов решений. Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+g(x)\,y=0. \tag{1}$$

Если функции $f(x)$, $g(x)$ аналитические и ограничены на вещественной оси при $x\to\infty$, то можно переписать это уравнение в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ \ldots\right)\frac{dy}{dx}+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ \ldots\right)y=0. \tag{2}$$

Функции

$$z_1=e^{\lambda_1 x}x^{\sigma_1},\quad z_2=e^{\lambda_2 x}x^{\sigma_2} \tag{3}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z''-\left(\lambda_1+\lambda_2+\frac{\sigma_1+\sigma_2}{x}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{x^2\,[\lambda_2-\lambda_1+(\sigma_2-\sigma_1)/x]}\right)z'+$$
$$+\left\{\left(\lambda_1+\frac{\sigma_1}{x}\right)\left(\lambda_2+\frac{\sigma_2}{x}\right)-\frac{\lambda_1\sigma_2+\lambda_2\sigma_1}{x^2\,[\lambda_2-\lambda_1+(\sigma_2-\sigma_1)/x]}\right\}z=0. \tag{4}$$

Коэффициенты этого уравнения совпадают до членов порядка $1/x$ с коэффициентами уравнения (2) при условии, что

$$\lambda_1+\lambda_2=-a_0,\quad \lambda_1\lambda_2=b_0,\quad \lambda_2-\lambda_1\neq 0, \tag{5}$$

$$\sigma_1+\sigma_2=-a_1,\quad \lambda_1\sigma_2+\lambda_2\sigma_1=b_1. \tag{6}$$

Первые два из этих уравнений определяют λ_1 и λ_2, которые совпадают лишь при $b_0 = \frac{1}{4}a_0^2$. Во всех случаях, кроме этого, мы можем определить σ_1 и σ_2.

Решение в виде сходящегося ряда может быть найдено методом вариации постоянных, но оно будет содержать неполные факториалы. Подставляя асимптотические разложения этих функций, мы получим выражения для y_1, y_2, такие, при которых y_1/z_1 и y_2/z_2 представятся в виде асимптотических рядов по нисходящим степеням x. Этот результат получил Айнс [5] методом, несколько отличным от нашего. Он не рассматривал случай, при котором $\lambda_1 = \lambda_2$. Решение тогда имеет другой вид.

Для простоты мы можем предположить, что множитель $e^{\lambda x}$ в решении отсутствует, так что a_0 и b_0 в уравнении (2) равны нулю. В этом случае функции

$$z_1, \quad z_2 = e^{\pm\mu x^{1/2}} x^{\sigma} \tag{7}$$

удовлетворяют уравнению

$$z'' - 2\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\frac{z'}{x} - \left(\frac{\mu^2}{4x} - \frac{\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma}{x^2}\right) z = 0, \tag{8}$$

коэффициенты которого совпадают с коэффициентами уравнения (2) до членов порядка $1/x$, если только

$$2\left(\sigma - \frac{1}{4}\right) = -a_1, \quad \frac{1}{4}\mu^2 = -b_1. \tag{9}$$

Уравнение (2) имеет решения, асимптотически равные функциям z_1, z_2, умноженным на ряды по нисходящим степеням $x^{1/2}$ при условии, что $b_1 \neq 0$.

Далее, если $b_1 = 0$, то уравнение (2) имеет особенность на бесконечности, и тогда имеются два решения в виде сходящихся рядов, если только индексы не равны или не отличаются на целое число. В последнем случае одно из решений может содержать логарифм.

Следовательно, если функции $f(x)$, $g(x)$ стремятся соответственно к a_0, b_0, когда $x \to \infty$, то мы можем вместо y подставить ряд

$$e^{\lambda x} x^{\sigma}\left(1 + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots\right) \tag{10}$$

и определить последовательно λ, σ и коэффициенты этого ряда; полученный таким образом ряд будет сходящимся либо асимптотическим для двух решений дифференциального уравнения. В особом случае, когда уравнение, определяющее λ, имеет

равные корни, решения будут иметь вид

$$e^{\pm \mu x^{1/2}} x^{\sigma}\left(1+\frac{\gamma_1}{x^{1/2}}+\frac{\gamma_2}{x}+\ \ldots\right) \tag{11}$$

с аналогичными свойствами. Мы будем относить такие решения (т. е. ряды по убывающим степеням x) к типу решений Стокса, хотя, вероятно, впервые разложения такого ряда дал Якоби для бесселевых функций.

17.121. Уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

имеет рассмотренную выше форму с $\lambda=\pm i$. Положим

$$y=e^{ix}u.$$

Тогда

$$u''+\left(2i+\frac{1}{x}\right)u'+\left(\frac{i}{x}-\frac{n^2}{x^2}\right)u=0.$$

Теперь положим

$$u=x^{\sigma}v$$

и возьмем такое σ, чтобы член при v/x обратился в нуль. Находим, что $\sigma=-{}^1/_2$, и

$$v''+2iv'-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{v}{x^2}=0.$$

Подставляя

$$v=1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ \ldots,$$

мы получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\left[r\,(r+1)-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\right]a_r=2i\,(r+1)\,a_{r+1}.$$

Следовательно,

$$v\sim 1+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{2ix}+\frac{\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\left(\frac{9}{4}-n^2\right)}{(2i)^2\,2!\,x^2}+\frac{\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\left(\frac{9}{4}-n^2\right)\left(\frac{25}{4}-n^2\right)}{(2i)^3\,3!\,x^3}\ \ldots=$$

$$=1-\frac{\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\left(\frac{9}{4}-n^2\right)}{2!\,(2x)^2}+$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\left(\frac{9}{4}-n^2\right)\left(\frac{25}{4}-n^2\right)\left(\frac{49}{4}-n^2\right)}{4!\,(2x)^4}-\ \ldots-$$

$$-i\left[\frac{\frac{1}{4}-n^2}{2x}-\frac{\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\left(\frac{9}{4}-n^2\right)\left(\frac{25}{4}-n^2\right)}{3!\,(2x)^3}+\ \ldots\right]=U-iV.$$

Таким образом, мы нашли асимптотическое решение следующего вида:

$$y_1 \sim x^{-1/2} e^{ix} (U - iV) = x^{-1/2} (U \cos x + V \sin x) + \\ + ix^{-1/2} (U \sin x - V \cos x).$$

Действительная и мнимая части, каждая в отдельности, будут также асимптотическими решениями.

Выбор коэффициентов, при которых это решение отвечает функции $J_n(x)$, может быть сделан на основании рассмотрения первого члена асимптотического разложения, найденного из решения в виде комплексного интеграла. Мы отложим это до тех пор, пока не найдем наиболее удобную парную функцию для $J_n(x)$.

Если n мало, а x велико, члены нашего разложения начинают быстро убывать. Например, для $n = 0$ и $x = 10$ члены при x^{-2} составляют лишь

$$\frac{9}{16 \cdot 2 \cdot (20)^2} = \frac{9}{12\,800}$$

от первого члена. Члены же ряда по возрастающим степеням начинают уменьшаться только с пятого члена, и для получения точности, скажем 0,001, надо брать очень много членов ряда. Поэтому асимптотические ряды чрезвычайно полезны. Нет смысла применять их лишь в том случае, когда $2x$ не больше, чем n^2. Если n составляет половину нечетного числа, то оба ряда обрываются и решения выражаются конечной суммой членов. В частности, при $n = {}^1/_2$ $U = 1$, $V = 0$ и решения имеют вид $x^{-1/2} \cos x$ и $x^{-1/2} \sin x$.

17.122. В некоторых случаях функции $f(x)$ и $g(x)$ не выражаются удобно в виде степенных рядов. Тогда полезен следующий метод. Положим

$$y = uv \tag{1}$$

и определим v так, чтобы коэффициент при u' обращался в нуль. Это дает соотношения

$$\frac{2v'}{v} + f = 0, \tag{2}$$

$$v = \exp\left[-\frac{1}{2} \int^x f(x)\, dx \right], \tag{3}$$

где постоянный сомножитель не влияет на существо дела. Тогда уравнение, из которого определяется u, принимает вид

$$u'' = \chi(x)\, u. \tag{4}$$

Допустим, что в рассматриваемом интервале $\chi(x)$ велико, а χ'/χ мало. Положим

$$u = \exp\left[\int^x \eta\, dx\right]. \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{u'}{u} = \eta, \quad \frac{u''}{u} = \left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \eta' = \eta' + \eta^2$$

и

$$\eta^2 + \eta' = \chi(x). \tag{6}$$

Это уравнение выглядит очень просто, однако оно нелинейно. Тем не менее если функция $\chi(x)$ меняется медленно, то мы можем приближенно принять

$$\eta = \chi^{1/2}(x) \tag{7}$$

и во втором приближении η' будет мало. Тогда

$$\eta^2 \doteqdot \chi(x) - \frac{1}{2}\frac{\chi'}{\chi^{1/2}}, \quad \eta \doteqdot \chi^{1/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\chi'}{\chi^{3/2}}\right) = \chi^{1/2} - \frac{1}{4}\frac{\chi'}{\chi},$$

$$u \doteqdot \chi^{-1/4}\exp\left[\int^x \chi^{1/2}\, dx\right]. \tag{8}$$

Проще всего оценить точность — это попытаться найти третье приближение; определяя η' из уравнения (8) и подставляя его в (6), мы находим

$$\eta \doteqdot \chi^{1/2} - \frac{1}{4}\frac{\chi'}{\chi} - \frac{1}{8\chi^{1/2}}\frac{d}{dx}\frac{\chi'}{\chi}. \tag{9}$$

Если A равно наименьшему значению $\chi^{1/2}$ в рассматриваемой области, то интеграл в последнем члене будет порядка $\frac{1}{8A}\left[\frac{\chi'}{\chi}\right]$. Поэтому, если в рассматриваемой области χ'/χ медленно меняется, ошибка будет накапливаться, если только функция χ не будет всюду велика [6,7].

17.123. Этот метод часто используется для нахождения первого члена асимптотического разложения. Рассматривая уравнение, определяющее интеграл Эйри,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy,$$

мы сразу же видим, что $\chi = x$, $\int_0^x \chi^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}$ и, значит, имеются асимптотические решения, начинающиеся с

$$x^{-1/4}\exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

Показатель экспоненты не кратен x, так что решение имеет вид, отличный от рассмотренного в **17.12**, но можно взять $\frac{2}{3}x^{3/2}$ за новую переменную и затем действовать, как и в предыдущем случае.

17.13. Можно получить аналогичное решение, если $\chi(x)$ зависит как от x, так и от дополнительного параметра h, причем

$$y'' = \chi(x)\, y = (h^2\chi_0 + h\chi_1 + \chi_2)\, y, \tag{1}$$

где h велико. Для любого h уравнение будет иметь два решения, определенных в любой области, а не только если x велико. Мы хотим знать, как ведут себя эти решения, когда h велико. Для этого необходимо получить разложения этих решений по нисходящим степеням h. Положим

$$y = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1/2} z. \tag{2}$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\xi'^2 \frac{d^2z}{d\xi^2} = \left(h^2\chi_0 + h\chi_1 + \frac{\xi'''}{2\xi'} - \frac{3}{4}\frac{\xi''^2}{\xi'^2}\right) z. \tag{3}$$

Возьмем

$$\xi = \int_0^x \left(\chi_0 + \frac{\chi_1}{h} + \frac{\psi_2}{h^2}\right)^{1/2} dx, \tag{4}$$

где ψ_2 до некоторой степени произвольно. Тогда дифференциальное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} - h^2 y = g(\xi, h)\, z, \tag{5}$$

где g можно разложить по нисходящим степеням h. Подставляя

$$z = e^{h\xi}\left(1 + \frac{f_1(\xi)}{h} + \frac{f_2(\xi)}{h^2} + \ldots\right) \tag{6}$$

и приравнивая коэффициенты при h^2, h, 1, ..., мы можем последовательно найти функции f_1, f_2, ... Подобным образом находим формальное решение, начинающееся с $\exp(-h\xi)$. Функцию ψ_2 удобно выбрать так, чтобы величина $|g(\xi, h)|$ была как можно меньше.

На практике мы обычно имеем дело лишь с первым приближением. Возьмем h действительным и положительным. Чтобы доказать, что решение является асимптотическим даже для этого случая, требуются ограничения на функцию $g(\xi, h)$ и на

рассматриваемую область. В частности, область может быть неограниченной, и тогда желательно иметь условия, при которых существуют решения Z_1, Z_2, удовлетворяющие соотношениям

$$Z_1 \exp(-h\xi) = 1 + M_1/h; \quad Z_2 \exp(h\xi) = 1 + M_2/h, \tag{7}$$

где M_1, M_2 ограничены при всех ξ из области, а также для всех $h \geqslant h_0 > 0$. Условия, налагаемые на область E, следующие: 1) E содержит по крайней мере одну точку действительной оси; 2) если точка ξ принадлежит E, то точки вида $\eta = \operatorname{Re}(\xi) + i\theta \operatorname{Im}(\xi)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ также принадлежат E (и, следовательно, верхняя и нижняя грани значений $\operatorname{Re}(\xi)$, которые могут быть бесконечными, являются точками действительной оси). Функция $g(\xi, h)$ должна удовлетворять условию: 3) на любом пути вдоль действительной оси или параллельно мнимой оси для всех $h \geqslant h_0$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} |g(t, h)|\, dt < M,$$

где M не зависит от ξ_1, ξ_2. Применяя этот метод, нужно учесть, что искомые решения являются решениями интегральных уравнений

$$Z_1(\xi) = e^{h\xi} + \int_A^{\xi} \frac{1}{2h} [e^{h(\xi - t)} - e^{-h(\xi - t)}]\, g(t, h)\, Z_1(t)\, dt, \tag{8}$$

$$Z_2(\xi) = e^{-h\xi} - \int_{\xi}^{B} \frac{1}{2h} [e^{h(\xi - t)} - e^{-h(\xi - t)}]\, g(t, h)\, Z_2(t)\, dt, \tag{9}$$

где A, B — нижняя и верхняя грани значений $\operatorname{Re}(\xi)$, а путь интегрирования в (8) состоит из отрезков от A до $\operatorname{Re}(\xi)$ вдоль действительной оси и от $\operatorname{Re}(\xi)$ до ξ параллельно мнимой оси; для (9) это соответственно от ξ до $\operatorname{Re}(\xi)$ и затем до B. Можно показать, что метод последовательных приближений решений (8) и (9) дает поправки, равные $k_r(\xi, h)$, умноженные на величину первого члена, причем $|k_r| < (2M/h)^r$. Таким образом, этот метод приводит к абсолютно сходящимся решениям, и погрешность, которая получится, если ограничиться лишь первым членом, не превосходит всюду $4M/h$ величины первого члена для $h \geqslant 4M$. Более внимательное рассмотрение свойств k_r показывает, что оно имеет асимптотическое разложение по степеням $1/h$, и Z_1, Z_2 могут быть вновь разложены в ряды по обратным степеням $1/h$, как (6).

Условие (2) важно потому, что в доказательстве предполагается, что верхняя грань значений $|e^{2ht}|$ на пути интегрирования (8) и, соответственно, $|e^{-2ht}|$ в (9) достигается в точке области $t=\xi$. Это было бы неверно, если условие (2) не выполняется. Функция ψ_2 должна быть выбрана, если возможно, так, чтобы выполнялось условие (3). Например, если

$$y''=(h^2+a)\,y, \tag{10}$$

то точными решениями этого уравнения являются $\exp[\pm(h^2+a)^{1/2}x]$.

Если в (4) мы возьмем $\psi_2=a$, то первые члены асимптотического решения совпадают с точными решениями. Если же мы возьмем $\psi_2=0$, первые члены будут равны $\exp(\pm hx)$. Отношения этих членов к точным решениям приближенно равны $\exp(\pm ax/2h)$, где показатель экспоненты неограниченно растет, когда $x\to\infty$. Это именно тот случай, когда самое лучшее — это взять $\psi_2=\chi_2$.

С другой стороны, рассмотрим уравнение, впервые предложенное Харди,

$$y''-(h^2\theta'^2+h\theta'')\,y=0. \tag{11}$$

Точные решения его

$$y_1=\exp h\theta;\quad y_2=2he^{h\theta}\int_x^\infty e^{-2h\theta(t)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\theta'}\,e^{-h\theta}-\frac{1}{2h}\,\frac{\theta''}{\theta'^3}\exp(-h\theta)+O\left(\frac{1}{h^2}\right), \tag{12}$$

что получается интегрированием по частям.

Если мы возьмем $\theta=(\ln x)^2$, а $\psi_2=\chi_2=0$, то найдем, что

$$\chi^{1/2}=2h\,\frac{\ln x}{x}\left[1-\frac{1}{4h}\,\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{32h^2}\,\frac{(\ln x-1)^2}{(\ln x)^2}+\ldots\right]. \tag{13}$$

Первые два члена приводят к функциям

$$y_1=\exp h(\ln x)^2, \tag{14}$$

$$y_2=\frac{x}{\ln x}\exp[-h(\ln x)^2], \tag{15}$$

совпадающим с первыми членами точного решения. Но в третьем члене появляются сомножители вида

$$x^{\pm(\ln x-4)/32h}(\ln x)^{-1/16h}, \tag{16}$$

которые становятся неограниченно большими в бесконечной области изменения x; это означает, что аппроксимация, даваемая первыми тремя членами, не будет равномерной.

Более детальное исследование уравнения (5) показывает, что $\int^{\infty} g(\xi, h)\, d\xi$ расходится при $\psi_2 = \chi_2$. Но если мы возьмем

$$h\xi^{1/2} = h\theta' + \frac{\theta''}{2\theta'}, \tag{17}$$

что соответствует

$$\psi_2 = \frac{\theta''^2}{4\theta'^2}, \tag{18}$$

то интеграл сходится абсолютно и равномерно, и аппроксимация не содержит нежелательных сомножителей, которые появляются в третьем члене (13).

Аппроксимации этого типа имеют свою длинную историю. К произвольному виду χ_0 их, вероятно, впервые применил Грин [8, 9]. Пользуясь аналогичными построениями, он показал, что энергия приливных волн в канале с медленно меняющимся сечением переносится без потерь за счет отражения. Мы будем называть такие приближения приближениями *гриновского типа*. Одновременно аппроксимации для отрицательных h^2 были получены Лиувиллем [10], который и установил для них границы применимости. Переход от задач физической оптики, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка в трехмерном пространстве, к задачам геометрической оптики, где используется уравнение в частных производных лишь первого порядка, по существу включает в себя тот же метод. Специальные применения метода к функциям Бесселя были даны еще раньше Карлини [2] в 1817 г. Имеются также многочисленные применения к волновой механике, главное из которых состоит в доказательстве того, что классическая механика — предельный случай квантовой механики при переходе к большим энергиям. В изложенной выше форме метод принадлежит Джеффрису [11, 12].

17.131. Если функция χ_0 имеет в рассматриваемой области нуль, то ξ', определенная при помощи **17.13** (4), стремится к нулю, когда $h \to \infty$, так что аппроксимация перестает быть верной. В случае простого нуля можно выбрать ξ так, чтобы дифференциальное уравнение приближенно свелось к уравнению

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = h^2\xi z, \tag{1}$$

решениями которого являются $z_1 = \mathrm{Bi}(h^{2/3}\xi)$, $z_2 = \mathrm{Ai}(h^{2/3}\xi)$. Допустим, что $\chi = \chi_0 + \chi_1/h + \psi_2/h^2$ обращается в нуль в точке $x = -\alpha$ (где α — величина порядка $1/h$), и возьмем $\chi_0'(0) > 0$.

Мы можем положить

$$\xi'^2\xi = \chi; \quad \frac{2}{3}\xi^{3/2} = \int_{-a}^{x} \left(\chi_0 + \frac{\chi_1}{h} + \frac{\psi_2}{h^2}\right)^{1/2} dx, \tag{2}$$

и это преобразование в точке $\xi = 0$ будет неособенным. Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} - h^2\xi z = g(\xi, h)\, z, \tag{3}$$

и решения можно получить из интегральных уравнений так же, как и в простейшем случае **17.13**, причем последовательные приближения будут убывать столь же быстро, как члены геометрической прогрессии со знаменателем $1/h$. На область E необходимо наложить некоторые ограничения. Наиболее употребительные состоят в том, что область E должна содержать отрезок действительной оси от 0 до B и отрезки прямых от 0 до $B_1 e^{2/3\pi i}$ и от 0 до $B_2 e^{-2/3\pi i}$; любую точку ξ, не лежащую на этих линиях, можно соединить с точкой ξ_0, принадлежащей одному из отрезков, дугой $\rho^{3/2}\cos\frac{3}{2}\theta = \text{const}$, где $t = \rho e^{i\theta}$; путь интегрирования состоит из участков этих трех линий и одной из дуг; на любом пути от 0 до B, от 0 до ξ_0 и от ξ_0 до ξ интеграл $\int |t^{-1/2} g(t, h)|\, dt|$ равномерно ограничен *).

Когда величина $|h^{2/3}\xi|$ достаточно велика, мы можем использовать первые члены асимптотических разложений функций Ai и Bi с ошибками порядка $1/h\xi^{3/2}$.

Мы пользуемся функциями Ai и Bi для того, чтобы связать решения вида **17.13**, справедливые по обеим сторонам от $\xi = 0$. Имеем

$$y = \xi'^{-1/2} z = \chi^{-1/4}\xi^{1/4} z. \tag{4}$$

Для $\xi > 0$ положим

$$M = \int_{-a}^{x} h\chi^{1/2}\, dx = \frac{2}{3} h\xi^{3/2},$$

тогда оба решения будут вида

$$y_1 = \sqrt{\pi}\, h^{1/6}\xi'^{-1/2}\, \mathrm{Bi}\,(h^{2/3}\xi)\,[1 + O(1/h)] = \chi^{-1/4}\exp M\,[1 + O(1/h)], \tag{5}$$

$$y_2 = \sqrt{\pi}\, h^{1/6}\xi'^{-1/2}\, \mathrm{Ai}\,(h^{2/3}\xi)\,[1 + O(1/h)] = \frac{1}{2}\chi^{-1/4}\exp(-M)\,[1 + O(1/h)]. \tag{6}$$

*) Об этих условиях и тех, которые налагались на E в **17.13**, см. [13].

Если $\xi < 0$, то положим

$$\xi = -\zeta, \quad L = \int_a^{-x} h(-\chi)^{1/2}\, d(-x).$$

Тогда

$$y_1 = |\chi|^{-1/4}\left[\cos\left(L + \tfrac{1}{4}\pi\right) + O(1/h)\right], \tag{7}$$

$$y_2 = |\chi|^{-1/4}\left[\sin\left(L + \tfrac{1}{4}\pi\right) + O(1/h)\right], \tag{8}$$

где χ может быть заменено на χ_0 с ошибкой порядка $1/h$.

При использовании (5) — (8), как на это обратил внимание Лангер [14, 15], необходимо соблюдать известную осторожность, чтобы установить соответствие между решениями по обе стороны от нуля функции χ_0. Если A и B постоянны, то общее решение $Ay_1 + By_2$ имеет асимптотические разложения вида

$$A\chi^{-1/4}\exp M\,[1 + O(1/h)] + \tfrac{1}{2}B\chi^{-1/4}\exp(-M)\,[1 + O(1/h)], \tag{9}$$

$$A|\chi|^{-1/4}\left[\cos\left(L + \tfrac{1}{4}\pi\right) + O(1/h)\right] + B|\chi|^{-1/4}\left[\sin\left(L + \tfrac{1}{4}\pi\right) + O(1/h)\right]. \tag{10}$$

Если для $\xi > 0$ решение экспоненциально мало, то отсюда следует, что $A = 0$ и, значит, решение должно быть с точностью до $O(1/h)$ равно $\frac{1}{2}B\chi^{-1/4}\exp(-M)$ и $B|\chi|^{-1/4}\sin\left(L + \frac{1}{4}\pi\right)$ на соответствующих сторонах от $\xi = 0$. Однако если неизвестно, равно ли A нулю, а можно лишь предположить, что A имеет порядок B/h, то это не окажет влияния на справедливость асимптотического разложения на осциллирующей стороне ($\xi < 0$); но для больших M член с A будет намного превосходить член с B на экспоненциальной стороне ($\xi > 0$), и асимптотическое разложение перестает существовать.

Подобным образом, если на осциллирующей стороне асимптотическое разложение равно $|\chi|^{-1/4}\cos\left(L + \frac{1}{4}\pi\right)$, то на экспоненциальной оно должно быть равно $\chi^{-1/4}\exp M$; обратное утверждение отсюда не следует. Можно избежать этих неприятностей при использовании формул (9) и (10), если все время обращать внимание на члены, определяющие ошибку приближения [16].

Идею пересечения нуля χ впервые выдвинул Релей [17] и развил затем Ганс [18]. Позже это было вновь открыто мно-

гими авторами. Лангер указал на то, что если χ имеет два нуля, то уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \pm\,[h^2(\xi^2-1)+g(\xi,\,h)]\,y.$$

Это уравнение имеет асимптотические решения, исследованные в **23.08**, которые могут быть использованы так же, как решения уравнения $y''=h^2\xi y$, в случае одного нуля.

17.132. Для иллюстрации этого метода рассмотрим уравнение Бесселя высокого порядка

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(x^2-n^2)\,y=0 \tag{1}$$

и положим

$$x=ne^{-z}. \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dz^2}=n^2(1-e^{2z})\,y. \tag{3}$$

Осциллирующая сторона расположена при $x>n$ или при $z<0$. Для $x<n$

$$M=n\int_0^z(1-e^{-2z})^{1/2}dz=n(\theta-\operatorname{th}\theta), \tag{4}$$

где

$$x=n\operatorname{sch}\theta. \tag{5}$$

Для $x>n$

$$L=n\int_0^\zeta(e^{2\zeta}-1)^{1/2}\,d\zeta=n(\operatorname{tg}u-u), \tag{6}$$

где $x=n\sec u$. Следовательно, имеется решение, равное для $x>n$

$$2\operatorname{tg}^{-1/2}u\left\{\sin\left[n(\operatorname{tg}u-u)+\tfrac{1}{4}\pi\right]+O\,(1/n)\right\},$$

а для $x<n$ равное

$$\operatorname{th}^{-1/2}\theta\exp[-n(\theta-\operatorname{th}\theta)][1+O\,(1/n)]=$$

$$=x^n\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)^{-1/4}[n+(n^2-x^2)^{1/2}]^{-n}\exp(n^2-x^2)^{1/2}[1+O\,(1/n)]. \tag{7}$$

Когда x мало, это приблизительно равно

$$x^n(2n)^{-n}e^n. \tag{8}$$

С другой стороны, первый член разложения в ряд $J_n(x)$ равен $\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}x\right)^n$, и если мы возьмем для факториала $n!$ приближение по формуле Стирлинга, то получим, что наше решение есть не что иное, как представление $(2\pi n)^{1/2}J_n(x)$.

Другое решение, справедливое для $x>n$, равно

$$2\,\mathrm{tg}^{-1/2}u\left\{\cos\left[n(\mathrm{tg}\,u-u)+\tfrac{1}{4}\pi\right]+O(1/n)\right\},$$

а для $x<n$

$$2\,\mathrm{th}^{-1/2}\theta\exp[n(\theta-\mathrm{th}\,\theta)][1+O(1/n)]=$$
$$=2x^{-n}\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)^{-1/4}[n+(n^2-x^2)^{1/2}]^n\exp[-(n^2-x^2)^{1/2}][1+O(1/n)], \tag{9}$$

что является представлением второго решения уравнения Бесселя, которое обозначается $-(2\pi n)^{1/2}Y_n(x)$ **(21.02)**.

Ошибки этих приближений порядка $1/n$. Эти приближения имеют одно большое преимущество по сравнению с рядами по убывающим степеням, состоящее в том, что их можно использовать для выбора подходящих постоянных, таких, что решение будет представлять ту же функцию, что и ряд по возрастающим степеням x (значения вблизи нуля функции χ_0 вычисляются, если необходимо, путем прямого применения интеграла Эйри). Соответствующая модификация для рядов с убывающими степенями обычно требует привлечения косвенных методов, связанных с представлением в виде комплексного интеграла, если такое представление существует. Если же такого представления нет, то следует свести задачу к численному сравнению в некоторой области, где как сходящиеся, так и асимптотические ряды могут быть вычислены непосредственно.

Применения этого метода к функциям Матье были даны Джеффрисом [19], а к определению коэффициента прохождения через потенциальный барьер в волновой механике Б. Джеффрис [20]. Другой метод для исследования этих задач может быть основан на решении дифференциальных уравнений, полученных в **23.08a**.

Обобщение на случай, когда χ имеет нуль порядка выше первого, было получено Гольдштейном [21].

Метод, основанный на подходящей замене независимой переменной в нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнениях в частных производных, был предложен Лайтхиллом [22].

ПРИМЕРЫ

1. Доказать, что при $n=x-h$ $(0<h<1,\ x>0)$

$$\int_x^\infty t^{-n}e^{-t}\,dt=x^{-n}e^{-x}\int_0^\infty\left(1+\frac{v}{x}\right)^{-x+h}e^{-v}\,dv\sim$$
$$\sim x^{-n}e^{-x}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}h\right)\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}h+\frac{1}{8}h^2\right)\frac{1}{x^2}+\ldots\right],$$

и показать применение такого разложения для улучшения аппроксимации неполного факториала, данное в виде асимптотического разложения в 17.01.

(Бикли и Миллер)

2. Решение уравнения

$$y'' + 256ye^{4x} = 0$$

обращается в 0 при $x = 0$. Определить приближенно, где находятся другие нули. Положив дополнительно $y' = 1$ при $x = 0$, найти положение и величину первого максимума. (I. C., 1936.)

3. Показать, как получить приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{X^4} = 0, \tag{1}$$

где X — функция от x, такая, что X'' мало по сравнению с $1/X^3$. Получить отсюда точное решение для случая $X'' = 0$.

Сравнить это решение с решением уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{X^4} = 0. \tag{2}$$

(I. C., 1937.)

4. Показать, что решение уравнения

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (n^2 - x^2)\,y = 0$$

для больших n, обращающееся в 0 при $x \to \infty$, кратно функции, асимптотическое представление которой имеет вид

$$\left(\frac{x^2}{n^2} - 1\right)^{-1/4} \exp\left[-n\left(\frac{x^2}{n^2} - 1\right)^{1/2} + n \operatorname{arcsec}\frac{x}{n}\right] \quad (x > n),$$

$$2\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{-1/4} \sin n\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi\right) - \sin\psi + \frac{1}{4}\pi\right] \quad (x < n),$$

где $\cos\psi = x/n$.

5. Показать, что решение уравнения

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (n^2 + x^2)\,y = 0$$

для больших n приближенно представляется в виде

$$y \sim \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{-1/4} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\left(\sec v + \ln \operatorname{tg}\frac{1}{2}v\right),$$

где

$$v = \operatorname{arctg}\frac{x}{n}.$$

6. Доказать, что если $x > 0$ и велико, то

$$\int_0^x \operatorname{Ai}(x)\,dx \sim \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,x^{-3/4}e^{-2/3x^{3/2}},$$

а если $x = -\xi$ и $\xi > 0$ велико, то

$$\int_0^x \mathrm{Ai}\,(x)\,dx \sim -\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\xi^{-3/4}\cos\left(\frac{2}{3}\,\xi^{3/2} + \frac{1}{4}\,\pi\right).$$

7. Доказать, что

$$\mathrm{Ai}\,(z)\,\mathrm{Bi}'\,(z) - \mathrm{Ai}'\,(z)\,\mathrm{Bi}\,(z) = \frac{1}{\pi},$$

причем постоянная $\frac{1}{\pi}$ сохраняется для случаев z малого, z большого, или $-z > 0$ и большого.

8. Показать, что, если $\frac{1}{2}\,\pi > |\arg z| > \delta > 0$, формула Стирлинга справедлива и для $(-z)!$ (Использовать равенство $z!\,(-z)! = \pi z\,\mathrm{cosec}\,\pi z$.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Watson G. N.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **17**, 133 (1918).
2. *Watson G. N.*, Theory of Bessel Functions, 1922. (Русский перевод: *Ватсон Д.*, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.)
3. *Airey J. R.*, Phil. Mag. (7), **24**, 521—552 (1937).
4. *Stoneley R.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **31**, 360—367 (1935).
5. *Ince E. L.*, Ordinary Differential Equations, 1927, p. 169—171. (Русский перевод: *Айнс Э. Л.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИ Украины, Харьков, 1939.)
6. *Milne W. E.*, Trans. Amer. Math. Soc., **31**, 907—918 (1929).
7. *Titchmarsh E. C.*, J. Lond. Math. Soc., **19**, 66—68 (1945).
8. *Green G.*, Cambr. Phil. Trans., **6**, 457—462 (1937); Papers, p. 225.
9. *Lamb G.*, Hydrodynamics, 1932, p. 274. (Русский перевод: *Ламб Г.*, Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.)
10. *Liouville J.*, J. Math., **2**, 22—25 (1837).
11. *Jeffreys H.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **23**, 428—436 (1924).
12. *Jeffreys H.*, Phil. Mag. (7), **33**, 451—456 (1942)
13. *Jeffreys H.*, Proc. Cambr. Phil, Soc., **49**, 601—611 (1953).
14. *Langer R. E.*, Bull. Amer. Math. Soc., 545—582 (1934).
15. *Langer R. E.*, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 461—490 (1949).
16. *Jeffreys H.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **52**, 61—66 (1956).
17. *Rayleigh*, Proc. Roy. Soc., **A86**, 207—226 (1912).
18. *Gans R.*, Ann. d. Phys., **47**, 709—736 (1915).
19. *Jeffreys H.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **23**, 437—476 (1924).
20. *Jeffreys B.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **38**, 401—405 (1942); **52**, 273—279 (1956).
21. *Goldstein S.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **28**, 81—90 (1928).
22. *Lihgthill M. J.*, Phil. Mag. (7), **40**, 1179—1201 (1949).

Глава 18

УРАВНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА, ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Разделяй и властвуй.

Людовик XI

18.01. Гравитационный потенциал в свободном пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Этому же уравнению удовлетворяют электрический и магнитный потенциалы в стационарном поле и потенциал поля скоростей несжимаемой жидкости. В однородной сжимаемой жидкости потенциал скоростей удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{2}$$

(c — скорость звука) в предположении, что скорость жидкости мала. Упругие волны в однородном твердом теле также удовлетворяют уравнениям вида (2) для скалярного и векторного потенциалов. Эти уравнения дают соответственно продольные и поперечные волны, распространяющиеся с двумя различными значениями скорости c. Уравнение (2) описывает также распространение электромагнитных волн, при этом c — скорость света. В однородной покоящейся среде распределение температуры удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{3}$$

где h^2 — коэффициент температуропроводности, определяемый как частное от деления коэффициента теплопроводности на теплоемкость единицы объема. Уравнение вида (3) описывает процесс диффузии, если в качестве φ взять концентрацию диффундирующего вещества.

Очевидно, что в стационарном случае оба уравнения (2) и (3) переходят в уравнение Лапласа. Уравнения колебаний воды в озере или в канале постоянной глубины, уравнение колебаний мембраны являются волновыми уравнениями, в которых отсутствует член $\partial^2\varphi/\partial z^2$.

Эти три уравнения (1) — (3) так широко применяются, что их часто называют «дифференциальными уравнениями физики». Они не содержат волнового уравнения квантовой механики, но даже для исследования этого более сложного уравнения необходимо прежде всего изучить уравнения (1) — (3).

Возможность решения этих уравнений связана главным образом с тем, что во многих системах координат у них *разделяются* переменные. Это означает, что решение представляется в виде произведения, причем каждый множитель является функцией только одной координаты или t. Мы попытаемся выбрать такую систему координат, в которой одна переменная принимала бы постоянные значения на поверхности, где функция φ должна удовлетворять заданным граничным условиям. Беря, например, волновое уравнение в прямоугольных координатах, будем искать решение в виде

$$\varphi = XYZT, \tag{4}$$

где X — функция только от x и т. д. Подставим это значение φ в уравнение (2) и разделим на $XYZT$. Тогда получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2}. \tag{5}$$

Каждый член этого уравнения является функцией только одной независимой переменной. Поскольку уравнение справедливо для всех значений x, y, z, t, то каждый член его должен быть постоянен, а, значит, всякое выражение вида

$$A\exp\left[i\left(lx + my + nz - \gamma t\right)\right], \tag{6}$$

где A, l, m, n, γ — постоянные и

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{\gamma^2}{c^2}, \tag{7}$$

является решением; решением будет также любая сумма таких выражений. Экспоненту с мнимым аргументом можно, конечно, заменить косинусом и синусом. Из теоремы Фурье мы знаем, что в ограниченной области значения φ и $\partial\varphi/\partial t$ при $t = 0$ могут быть представлены в виде рядов произведений синусов и косинусов от lx, my, nz; следовательно, мы получим полное решение, если умножим каждый член ряда на соответствующий множитель от γt. В качестве примера рассмотрим прямоугольную мембрану, углы которой закреплены в точках (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b). Поскольку края мембраны при этом фиксируются, решение должно обращаться в 0 при $x = 0$ или a, $y = 0$ или b.

При этом в решении допустимы члены, содержащие $\sin\frac{l\pi x}{a}\times$ $\times\sin\frac{m\pi y}{b}$, где l и m — целые числа; косинусы не обращаются в 0 на краях. В этом случае решение будет иметь вид

$$\varphi=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\left(A_{l,m}\cos\gamma t+B_{l,m}\sin\gamma t\right),$$

где

$$\frac{\gamma^2}{c^2}=\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right).$$

Отсюда (предполагая возможность почленного дифференцирования ряда) получим

$$\varphi_{t=0}=\sum\sum A_{l,m}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}=\sum\sum\gamma B_{l,m}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Если нам известны начальные значения φ и $\partial\varphi/\partial t$, то, разлагая их в двойной ряд Фурье по синусам и сравнивая коэффициенты, мы определим $A_{l,m}$ и $B_{l,m}$. Таким образом, решение найдено.

В случае колебания воды в мелком прямоугольном озере постоянной глубины смещение свободной поверхности ζ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению. Но при этом граничные условия другие. В этом случае на границе должна обращаться в нуль нормальная составляющая скорости, которая пропорциональна $\partial\zeta/\partial n$. Следовательно, при $x=0$ и $x=a$ $\partial\zeta/\partial x=0$, а при $y=0$ и $y=b$ $\partial\zeta/\partial y=0$. Решение, удовлетворяющее граничным условиям, будет теперь произведением косинусов, а не синусов; и значит, ζ и $\partial\zeta/\partial t$ для $t=0$ надо разлагать в двойной ряд Фурье по косинусам, а не по синусам. После этого члены ряда должны быть умножены на тот же временной фактор, что и в предыдущем случае. Если коэффициент $A_{0,0}$ отличен от нуля, то это значит, что величина ζ колеблется около своего среднего значения, не равного нулю, или, иными словами, что начало отсчета ζ не совпадает с уровнем невозмущенной свободной поверхности.

Среднее значение производной $(\partial\varphi/\partial t)_{t=0}$ по всей прямоугольной области равно нулю, в противном случае общее количество жидкости менялось бы со временем. Поэтому $B_{0,0}=0$. Условиям разложения начальных значений φ и $\partial\varphi/\partial t$ в ряды Фурье (по одной, двум или трем переменным в зависимости от того,

является ли область одно-, дву- или трехмерной) удовлетворяет большинство функций, встречающихся на практике.

18.011. Уравнения эллиптического, параболического и гиперболического типа. Мы видим, что уже в случае распространения одномерной волны можно построить не равные тождественно нулю решения уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{c^2\,\partial t^2},$$

которые обращаются в нуль для всех значений времени при $x=a$, b, причем такие решения могут обращаться в нуль также для $a \leqslant x \leqslant b$ при $t=0$ или $2(b-a)/c$. Указанное свойство решений противоположно свойству решений двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

В последнем случае решение, исчезающее для всех значений y при $x=0$ и $x=a$ и для всех значений x при $y=0$ и $y=b$, с необходимостью обращается в нуль для всех x, y, лежащих внутри прямоугольника. Это отличие связано с тем, что, перенося все члены уравнения в одну сторону, мы получим одинаковые знаки перед этими членами в случае уравнения Лапласа и противоположные знаки в случае волнового уравнения. В более общей форме это можно выразить следующим образом: пусть члены уравнения, содержащие вторые производные, имеют вид

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};$$

тогда граничные условия, которые можно наложить на решение этого уравнения, имеют совершенно разный характер в зависимости от того, будет ли величина $ab-h^2$ положительна или отрицательна. В первом случае, если φ задана на замкнутой кривой, это определяет решение уравнения всюду внутри области, ограниченной этой кривой, а соответствующее уравнение называется уравнением *эллиптического типа*. Во втором случае уравнение называется уравнением *гиперболического типа*, и его решения не обладают указанным свойством. Мы не будем заниматься общей теорией, которая в полном виде изложена в книге Вебстера [1]. Величины a, b и h не обязательно постоянны, однако при этом выражение $ab-h^2$ может менять знак внутри рассматриваемой области. Так обстоит дело при описании движения снаряда со сверхзвуковой скоростью, и это связано с формированием ударной волны [2].

18.012. Уравнение теплопроводности в одномерном случае имеет промежуточный характер ($ab - h^2 = 0$) и называется уравнением *параболического типа*. Ввиду того что это уравнение первого порядка по t, для него нельзя независимо задать начальные значения φ и $\partial\varphi/\partial t$ при $t = 0$. Обобщение на случай большей размерности можно легко сделать, но мы ограничимся иллюстрацией только одномерного случая. Если

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

причем $\varphi = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, то частное решение имеет вид

$$\varphi = \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \exp\left(-\frac{h^2 n^2 \pi^2 t}{a^2}\right).$$

Поэтому если функция φ при $t = 0$ разложена в ряд Фурье, то мы получим решение уравнения в виде

$$\varphi = \sum_1^\infty A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \exp\left(-\frac{h^2 n^2 \pi^2 t}{a^2}\right).$$

Характерная особенность этого решения заключается в том, что все показатели, содержащие t, отрицательны. Поэтому если температура постоянно равна нулю в двух точках отрезка, то она будет всюду стремиться к нулю с возрастанием времени. Если ряд сходится при $t = 0$, то функция φ и ее производные любого порядка по x и по t существуют и представляются в виде сходящихся рядов при любом положительном значении t. Общая тенденция явления теплопроводности заключается в сглаживании разностей температур. Это является, конечно, другим проявлением второго закона термодинамики, однако уравнение теплопроводности определяет еще и временной масштаб этого сглаживания, тогда как из второго закона термодинамики этого получить нельзя. Когда функция φ удовлетворяет волновому уравнению, можно показать, что неравномерности функции φ с изменением времени не уменьшаются, а только перемещаются в другое место.

Периодические решения уравнения теплопроводности могут существовать лишь в тех случаях, когда имеется периодический источник тепла либо внутри интервала, либо на его границе.

Другая особенность уравнения теплопроводности заключается в том, что существуют жесткие ограничения на распределение температуры, которое можно получить из некоторого начального распределения в последующие моменты времени. Мы

видели, что ряды Фурье, встречающиеся на практике, сходятся обычно как $\sum n^{-s}$, где s — небольшое целое число. В благоприятных случаях ряды, например, рассмотренные в **14.05**, сходятся как $\sum (r/a)^n$ при $r<a$. Предположим теперь, что функция φ в момент времени $-\tau$ ($\tau>0$) представлена в виде медленно сходящегося ряда Фурье. Тогда соответствующие члены ряда в момент времени 0 будут убывать как $\exp(-h^2n^2\pi^2\tau/a^2)$, т. е. быстрее любой геометрической прогрессии. Таким образом, если ряд Фурье для функции φ в момент $t=0$ не удовлетворяет этому условию для $\tau>0$, то распределение φ не может быть получено из некоторого предшествующего распределения благодаря лишь процессу теплопроводности без каких-либо внешних возмущений.

18.013. Общее решение Уиттекера. Вопрос о том, является ли решение уравнения в частных производных наиболее общим, не сводится к подсчету числа произвольных постоянных, как это имеет место в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы ограничимся лишь указанием типов общих решений, полученных Уиттекером. Общее решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix\cos v + iy\sin u,\ u)\,du,$$

где $f(\zeta,\ u)$ — произвольная функция. Общее решение волнового уравнения имеет вид

$$\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\sin u\cos v + y\sin u\sin v + z\cos u + ct,\ u,\ v)\,du\,dv.$$

Эти решения могут быть преобразованы к другому виду большим числом различных способов. Их многочисленные применения даны в книге Уиттекера и Ватсона [3].

18.02. Криволинейные координаты. Для других форм границы решение вида **18.01** (4) применимо в редких случаях, тогда как общее решение Уиттекера может быть использовано после соответствующего преобразования координат. С другой стороны, представляя функцию φ в виде

$$\varphi = f(x,\ y,\ z)\,T, \tag{1}$$

мы получим

$$\frac{1}{f}\nabla^2 f = \left(0,\ \frac{1}{c^2T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2},\ \frac{h^2}{T}\frac{\partial T}{\partial t}\right) \tag{2}$$

в зависимости от того, рассматриваем ли мы уравнение Лапласа, волновое уравнение или уравнение теплопроводности. Обе части равенства (2) должны быть постоянными, и уравнение приводится к виду

$$\nabla^2 f = -\varkappa^2 f. \tag{3}$$

Это уравнение должно быть решено для заданных граничных условий. Заметим теперь, что волновое уравнение для непрерывной среды можно рассматривать как предельный случай уравнений движения системы близких друг к другу частиц, образующих устойчивую решетку. Поэтому, полагая $T = e^{\gamma t}$, мы заключаем, что все возможные значения γ^2 для нормальных колебаний являются действительными отрицательными числами.

При тех же граничных значениях функции $f(x, y, z)$ все значения γ для свободного потока тепла будут действительны и отрицательны. Определение решения при данных начальных условиях сводится, таким образом, к представлению общей функции f через собственные функции уравнения (3). Временной фактор во всех случаях может быть выделен в виде множителя, и мы просто должны рассматривать уравнение (3), полагая $\varkappa^2 = 0$ для задач теории потенциала. В связи с этим временной фактор не будет явно выписываться, поскольку он может быть введен в конце вычисления.

Уравнение (3) допускает разделение переменных для нескольких систем координат, отличных от декартовых. В общем случае ортогональных криволинейных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 элементы длины ds_1, ds_2, ds_3, соответствующие малым приращениям $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, равны $h_1 d\xi_1$, $h_2 d\xi_2$, $h_3 d\xi_3$.

Согласно лемме Грина,

$$\int\int\int \nabla^2 \varphi \, d\tau = \int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{4}$$

Применим это соотношение для малого объема, ограниченного поверхностями

$$\xi_1 = \xi_{10} \pm \frac{1}{2}\delta\xi_1, \quad \xi_2 = \xi_{20} \pm \frac{1}{2}\delta\xi_2, \quad \xi_3 = \xi_{30} \pm \frac{1}{2}\delta\xi_3.$$

На поверхности, где ξ_1 постоянно, выполняется соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{h_1 \partial \xi_1}; \tag{5}$$

здесь n — направление возрастания ξ_1. Элемент площади этой поверхности равен $h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3$. Отсюда $\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ по такому элементу равен $\int\int\int \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} d\xi_2 d\xi_3$. Две поверхности, заданные

уравнениями $\xi_1 = \xi_{10} \pm \frac{1}{2}\delta\xi_1$, дадут в этот интеграл вклад

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right)\delta\xi_1\,\delta\xi_2\,\delta\xi_3 + o(\delta\xi_1\,\delta\xi_2\,d\xi_3),$$

поскольку для поверхности с большим значением ξ_1 внешняя нормаль направлена в сторону возрастания ξ_1, тогда как для меньшего значения ξ_1 она направлена в сторону убывания ξ_1. Интеграл в правой части равенства (4) является суммой таких выражений для трех пар противоположных граней. Элемент объема равен $h_1h_2h_3\,\delta\xi_1\,\delta\xi_2\,\delta\xi_3 + o(\delta\xi_1\,\delta\xi_2\,\delta\xi_3)$. Поэтому

$$h_1h_2h_3\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}\right). \qquad (6)$$

Равенство (6) справедливо почти везде, а если обе части его непрерывны, то оно справедливо везде. Последнее условие будет, как правило, выполняться для полученных далее решений. Уравнение, которое необходимо решить, имеет вид (см. **18.02а**)

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}\right)\right] = -\varkappa^2\varphi. \qquad (7)$$

Преобразование принимает особо простой вид, если $\xi_3 = z$. Такой выбор ξ_3 удобен, когда границей является цилиндр с сечением произвольной формы. При этом $h_3 = 1$, а ξ_1 и ξ_2 являются функциями только от x, y. Полагая далее

$$\xi_1 + i\xi_2 = f(x + iy), \qquad (8)$$

мы видим, что соотношения ортогональности выполняются вследствие справедливости условий Коши — Римана и, кроме того,

$$h_1^2 = h_2^2 = \left|\frac{d(x+iy)}{d(\xi_1+i\xi_2)}\right|^2 = h^2. \qquad (9)$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_2^2} + \frac{\partial}{\partial z}h^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\varkappa^2\varphi \qquad (10)$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_2^2} + h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\varkappa^2h^2\varphi. \qquad (11)$$

В частности, если функция φ не зависит от z и t, уравнение сводится к уравнению Лапласа относительно переменных ξ_1 и ξ_2.

18.02а. Градиент скалярной функции φ в общем случае ортогональных криволинейных координат имеет компоненты, растущие в направлениях ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{h_1\,\partial\xi_1}, \quad u_2 = \frac{\partial\varphi}{h_2\,\partial\xi_2}, \quad u_3 = \frac{\partial\varphi}{h_3\,\partial\xi_3}.$$

Дивергенция векторной функции $\mathbf{u}$ может быть определена по потоку, исходящему из элемента $d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$, согласно **18.02**, в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3u_1)+\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3h_1u_2)+\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2u_3)\right].$$

Ротор вектора оценивается по интегралу от его нормальной компоненты по поверхности, на которой ξ_1 постоянно, ξ_2 постоянно у одной пары углов, а ξ_3 постоянно для другой пары; значения ξ_2, ξ_3 у противоположных углов различаются на $\delta\xi_2$, $d\xi_3$. По теореме Стокса этот интеграл равен $\int u_i\, dx_i$. Подставляя в интеграл значения u_i и принимая, что $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$ малы, находим

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})_1=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3u_3)-\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_2u_2)\right].$$

В цилиндрических координатах ($\bar\omega$, λ, z):

$$\operatorname{grad}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\omega},\ \frac{\partial\varphi}{\bar\omega\,\partial\lambda},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{1}{\bar\omega}\frac{\partial}{\partial\bar\omega}(\bar\omega u_{\bar\omega})+\frac{\partial u_\lambda}{\bar\omega\,\partial\lambda}+\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})_{\bar\omega}=\frac{1}{\bar\omega}\frac{\partial u_z}{\partial\lambda}-\frac{\partial u_\lambda}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})_\lambda=\frac{\partial u_{\bar\omega}}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial\bar\omega},$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})_z=\frac{1}{\bar\omega}\frac{\partial}{\partial\bar\omega}(\bar\omega u_\lambda)-\frac{\partial u_{\bar\omega}}{\bar\omega\,\partial\lambda}.$$

В сферических полярных координатах (r, θ, λ):

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\ \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\theta},\ \frac{\partial\varphi}{r\sin\theta\,\partial\lambda},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta u_r+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta u_\theta)+\frac{\partial}{\partial\lambda}(ru_\lambda)\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\lambda)-\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda}\right],$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u})_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial u_r}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta u_\lambda)\right],$$

$$(\operatorname{rot}u)_\lambda=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right].$$

Компоненты напряжений в этих координатах даны в книге Лява [7, стр. 56], но его h_i равны нашим $1/h_i$; а его компоненты e_{23}, e_{31}, e_{12} равны нашим удвоенным.

18.03. Цилиндрические координаты. Пусть

$$\bar\omega^2=x^2+y^2,\ \lambda=\operatorname{arctg}(y/x), \tag{1}$$

$$\ln\bar\omega+i\lambda=\ln(x+iy). \tag{2}$$

Положим

$$\xi_1 = \ln \bar{\omega},\ \xi_2 = \lambda,\ x + iy = e^{\xi_1 + i\xi_2},\ h^2 = |x + iy|^2 = \bar{\omega}^2. \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \ln \bar{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial \ln \bar{\omega}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} = -\bar{\omega}^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \varkappa^2 \varphi \right), \tag{4}$$

или

$$\bar{\omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left(\bar{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\omega}} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \bar{\omega}^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \varkappa^2 \varphi \right) = 0. \tag{5}$$

Полагая

$$\varphi = P \Lambda Z, \tag{6}$$

где P, Λ, Z — функции соответственно от $\bar{\omega}$, λ, z, получим

$$\frac{1}{P} \bar{\omega} \frac{d}{d\bar{\omega}} \left(\bar{\omega} \frac{dP}{d\bar{\omega}} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda} + \bar{\omega}^2 \left(\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \varkappa^2 \right) = 0. \tag{7}$$

Здесь второй член зависит только от λ, а другие члены от λ не зависят. Приравнивая сумму этих членов $-n^2$, получим уравнение

$$\frac{1}{\bar{\omega} P} \frac{d}{d\bar{\omega}} \left(\bar{\omega} \frac{dP}{d\bar{\omega}} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \varkappa^2 - \frac{n^2}{\bar{\omega}^2} = 0, \tag{8}$$

второй член которого зависит только от z, а остальные члены от z не зависят. Приравнивая сумму этих членов $-\mu^2$, получаем уравнение

$$\bar{\omega} \frac{d}{d\bar{\omega}} \left(\bar{\omega} \frac{dP}{d\bar{\omega}} \right) + [(\varkappa^2 - \mu^2) \bar{\omega}^2 - n^2] P = 0. \tag{9}$$

Наконец, с помощью подстановки $(\varkappa^2 - \mu^2)^{1/2} \bar{\omega} = \xi$ мы приходим к *уравнению Бесселя*

$$\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dP}{d\xi} \right) + (\xi^2 - n^2) P = 0. \tag{10}$$

Приведенные здесь преобразования имеют особенность в начале координат. Поэтому λ не будет однозначной функцией от x, y, если возможен обход вокруг начала. Однако функция φ и, следовательно, функция Λ обязаны быть однозначными. Это может быть достигнуто, если n — целое число, поскольку $\cos n\lambda$ и $\sin n\lambda$ будут в этом случае однозначными функциями от x и y. Для других значений n это будет не так. Если решение должно существовать внутри полного круга с центром в начале координат, то число n обязано быть целым, причем без ограничения общности его можно считать положительным. Однако если решение должно существовать лишь в секторе $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, то должны быть, вообще говоря, заданы дополнительные граничные условия при $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$. Допу-

стим, например, что функция $\varphi = 0$ во всех точках границы. В этом случае мы приходим к решениям вида

$$\Lambda = \sin n(\lambda - \alpha),$$

причем n подчинено условию

$$\sin n(\beta - \alpha) = 0,$$

откуда снова следует, что допустима лишь дискретная последовательность значений n. Общая природа преобразований координат, содержащих особенность внутри рассматриваемой области, такова, что требование однозначности решения является в известном смысле дополнительным граничным условием.

Аналогично, если потребовать, чтобы решение φ было конечно в начале координат, мы ограничим допустимые решения только функциями $J_n(\xi)$, поскольку второе решение уравнения Бесселя $Y_n(\xi)$ бесконечно в начале координат. Если далее функция φ обращается в нуль на окружности $\bar{\omega} = a$, то должно выполняться условие $J_n\left[(\varkappa^2 - \mu^2)^{1/2} a\right] = 0$. Функция J_n обращается в нуль для бесконечной последовательности значений аргумента, тем самым граничные условия определяют допустимый набор значений $\varkappa^2 - \mu^2$.

Далее, если решение определяется внутри цилиндра конечной длины, то накладываются ограничения на допустимые значения μ. Если решение ищется только в кольце, ограниченном двумя окружностями, то для удовлетворения граничных условий потребуются и другие решения уравнения Бесселя, сингулярные в нуле, и новые граничные условия определят отношение коэффициентов при общих типах решений.

18.04. Параболические цилиндрические координаты. Положим

$$\xi_1 + i\xi_2 = (x + iy)^{1/2}, \quad x = \xi_1^2 - \xi_2^2, \quad y = 2\xi_1\xi_2. \tag{1}$$

Исключая ξ_2, мы получаем при постоянном ξ_1 соотношение

$$x = \xi_1^2 - \frac{y^2}{4\xi_1^2}. \tag{2}$$

Уравнение (2) описывает семейство парабол с общим фокусом в начале координат, оси которых направлены вдоль отрицательных значений x. Аналогично для постоянного значения ξ_2 мы получим

$$x = \frac{y^2}{4\xi_2^2} - \xi_2^2, \tag{3}$$

т. е. семейство софокусных парабол с осью вдоль $x \to +\infty$.

Тогда

$$h^2 = 4(\xi_1^2 + \xi_2^2). \tag{4}$$

Если функция φ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\mu^2 \varphi, \tag{5}$$

то существует решение вида

$$\varphi = X_1 X_2 Z, \tag{6}$$

если

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \xi_1^2} + [4(\varkappa^2 - \mu^2)\xi_1^2 - \alpha] X_1 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial \xi_2^2} + [4(\varkappa^2 - \mu^2)\xi_2^2 + \alpha] X_2 = 0, \tag{8}$$

где α — постоянная. Подстановка $\xi_1 = i\eta$ переводит уравнение (7) в уравнение (8). Таким образом, для решения задачи с параболическими границами нужны решения одного и того же уравнения для действительного и чисто мнимого аргумента. Если $\varkappa^2 > \mu^2$, то решения будут осциллирующими как по ξ_1, так и по ξ_2 при достаточно больших значениях этих величин.

Такие уравнения возникают в теории приливных волн в заливе параболической формы. Те же уравнения описывают гармонический осциллятор в квантовой механике. Мы можем считать ξ_1 и ξ_2 однозначными функциями координат, если мы не пересекаем осей парабол по одну сторону от начала координат.

18.05. Эллиптические параболические координаты. Положим

$$x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta), \quad x = c \operatorname{ch}\xi \cos\eta, \quad y = c \operatorname{sh}\xi \sin\eta. \tag{1}$$

Кривые постоянного ξ являются эллипсами

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \tag{2}$$

а кривые постоянного η — софокусными гиперболами

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1. \tag{3}$$

Если считать, что $\xi \geqslant 0$, мы опишем полный софокусный эллипс при изменении η от 0 до 2π. В этом случае имеем

$$h^2 = |c \operatorname{sh}(\xi + i\eta)|^2 = c^2(\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta) =$$
$$= \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta). \tag{4}$$

Если выполнены условия

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\mu^2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2}c^2(\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta)(\varkappa^2-\mu^2)\varphi = 0, \tag{6}$$

то можно искать стандартное решение в виде

$$V = XYZ, \tag{7}$$

где функции X и Y удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}-\left[R-\frac{1}{2}c^2(\varkappa^2-\mu^2)\operatorname{ch}2\xi\right]X = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}+\left[R-\frac{1}{2}c^2(\varkappa^2-\mu^2)\cos 2\eta\right]Y = 0. \tag{9}$$

Обозначим

$$\frac{1}{2}c^2(\varkappa^2-\mu^2) = 16q. \tag{10}$$

Уравнение (9) является *уравнением Матье*. Постоянная R определяется из условия, чтобы решение этого уравнения имело период 2π. Очевидно, если $q = 0$, то R должно быть равно квадрату целого числа. Поскольку коэффициент при Y является четной функцией, существует одно четное и одно нечетное решение для каждой пары значений величин R и q. Как было показано Айнсом и другими авторами, только одно из этих решений может быть периодическим, кроме случая $q = 0$, и требование периодичности одного из решений определяет дискретную последовательность значений величины R. Четное решение обозначается символом $\mathrm{ce}_n(\eta, q)$, нечетное решение — символом $\mathrm{se}_n(\eta, q)$. Заменяя в уравнении (8) ξ на $i\theta$, мы получаем уравнение (9).

Поскольку мы всегда считаем ξ положительным, единственный способ сравнения величин для точек, лежащих на противоположных сторонах относительно линии, соединяющей фокусы, состоит в замене η на $2\pi-\eta$. Величины $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ должны быть непрерывны вдоль этой линии. Но при $\xi = 0$

$$Y\frac{dX}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}c\operatorname{sh}\xi\cos\eta+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}c\operatorname{ch}\xi\sin\eta = -c\sin\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{11}$$

$$X\frac{\partial Y}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}c\operatorname{ch}\xi\sin\eta+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}c\operatorname{sh}\xi\cos\eta = -c\sin\eta\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{12}$$

Поэтому при $\xi = 0$ величины $\frac{1}{\sin\eta} Y \frac{dX}{d\xi}$ и $\frac{1}{\sin\eta} X \frac{dY}{d\eta}$ не меняются при замене η на $2\pi - \eta$. Если Y — четная функция η, то $Y/\sin\eta$ меняет знак, и, следовательно, должно выполняться условие $dX/d\xi = 0$. Поэтому X есть четная функция ξ. Если же $Y = \mathrm{se}_n(\eta, q)$ — нечетная функция, то $dY/d\eta$ не меняет знака, откуда следует, что $X = 0$. Значит, X будет нечетной функцией.

Таким образом, возможными типами решений (в действительной форме) являются функции вида

$$XY = \mathrm{ce}_n(i\xi, q)\,\mathrm{ce}_n(\eta, q), \qquad XY = -i\,\mathrm{se}_n(i\xi, q)\,\mathrm{se}_n(\eta, q). \quad (13)$$

Уравнение Матье интересно с математической точки зрения, поскольку это простейшее уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Условие, чтобы его решение имело период 2π, вытекает из физических соображений при решении задач о колебаниях мембран и о приливных волнах. Кроме того, существует большое число задач о колебаниях, в которых восстанавливающая сила содержит периодический коэффициент. К этим задачам применимы методы решения, аналогичные методам, развитым для решения уравнения Матье.

18.05а. Имеется много статей об уравнении Матье и связанных с ним уравнениях, из которых особенно существенные — Айнса и Гольдштейна, впервые предложивших хорошие общие методы вычислений. Ссылки имеются у Бикли [8], а подробное описание — у Мак-Лахлан [9].

18.06. Сферические и сфероидальные координаты. Характерная особенность этого случая состоит в том, что одна из координат принимает постоянные значения на поверхности сферы или соответственно эллипсоида вращения. В обоих случаях существует ось симметрии (в случае сферы, разумеется, таких осей бесконечное множество), и в качестве одной из координат $\xi_3 = \lambda$ можно взять азимутальный угол относительно этой оси, тогда как две другие координаты образуют ортогональную систему в плоскостях $\lambda = \mathrm{const}$. Для цилиндрических координат $\bar{\omega}$, λ, z также можно упростить вычисления, используя тот факт, что выражение

$$\bar{\omega}^s(\cos s\lambda + i \sin s\lambda) = (x + iy)^s \quad (1)$$

дает два решения уравнения Лапласа. Для сферических координат мы знаем, что существует семейство решений вида $r^s \sin^s\theta\,(\cos s\lambda, \sin s\lambda)$. Если теперь обозначить одно из этих решений через M, то можно рассмотреть другие решения вида FM,

содержащие M в качестве множителя, где функция F предполагается не зависящей от λ. В равенстве

$$\nabla^2(FM) = M\nabla^2 F + 2\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial M}{\partial x_i} + F\nabla^2 M \tag{2}$$

последний член обращается в нуль, второй же член инвариантен относительно вращения осей. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial s_1}\frac{\partial M}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s_2}\frac{\partial M}{\partial s_2} + \frac{\partial F}{\partial s_3}\frac{\partial M}{\partial s_3}. \tag{3}$$

Но $ds_3 = \bar{\omega}\, d\lambda$ и $\partial F/\partial s_3 = 0$. Следовательно,

$$\nabla^2(FM) = M\nabla^2 F + 2\left(\frac{\partial F}{\partial s_1}\frac{\partial M}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s_2}\frac{\partial M}{\partial s_2}\right). \tag{4}$$

18.061. Сферические полярные координаты.

$$ds_1 = dr, \qquad ds_2 = r\, d\theta, \qquad ds_3 = r\sin\theta\, d\lambda \tag{5}$$

и

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\sin\theta\, d\lambda}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{r^2\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2\varphi}{r^2\sin^2\theta\, d\lambda^2}. \tag{6}$$

Поскольку уравнение Лапласа однородно относительно r, мы ищем решение вида

$$\varphi = FM, \qquad F = r^{n-s}\Theta, \tag{7}$$

где функция Θ зависит только от θ. Теперь

$$\nabla^2 F = (n-s)(n-s+1)\, r^{n-s-2}\Theta + r^{n-s-2}\frac{\partial}{\sin\theta\,\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial F}{r\,\partial\theta}\frac{\partial M}{r\,\partial\theta} = r^{n-s-2}\left[s(n-s)\Theta M + sM\operatorname{ctg}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]. \tag{9}$$

Отсюда получаем для сферических координат выражение

$$\nabla^2(FM) = Mr^{n-s-2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + 2s\operatorname{ctg}\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + (n-s)(n+s+1)\Theta\right]. \tag{10}$$

Условие $\nabla^2\varphi = 0$ приводит к дифференциальному уравнению для функции Θ (мы положили здесь $\cos\theta = \mu$)

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right] - 2s\mu\frac{d\Theta}{d\mu} + (n-s)(n+s+1)\Theta = 0. \tag{11}$$

При $s = 0$ это уравнение переходит в *уравнение Лежандра.*

Обозначая решения уравнения (11) через Θ_1 и Θ_2, мы получим решения уравнения Лапласа в сферических координатах в виде

$$\tilde{\omega}^s(\cos s\lambda, \sin s\lambda)\, r^{n-s}(\Theta_1, \Theta_2) = r^n \sin^s\theta\,(\Theta_1, \Theta_2)(\cos s\lambda, \sin s\lambda). \quad (12)$$

Мы не предполагали, что число n положительно. Уравнение (11) остается неизменным при замене n на $-n-1$, откуда следует существование еще одной системы решений уравнения Лапласа, которая получается, если в выражении (12) заменить r^n на r^{-n-1}, оставляя без изменения остальные множители. Выражая функцию Θ в виде ряда по степеням μ, мы получим два решения: одно из них будет четной, а второе — нечетной функцией μ.

Если n и s — целые числа, причем число $n-s$ четное, то, как мы увидим, четный ряд обрывается; если же $n-s$ — число нечетное, то обрывается нечетный ряд. Эти обрывающиеся ряды, умноженные на соответствующую постоянную, мы обозначаем через

$$\sin^s\theta \cdot \Theta_1 = p_n^s(\mu), \quad (13)$$

$$\sin^s\theta \cdot \Theta_2 = q_n^s(\mu). \quad (14)$$

Исключение возникает при $s=0$. Поскольку

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2} = 0\cdot\Lambda,$$

общее решение имеет вид

$$\Lambda = A + B\lambda. \quad (15)$$

Однако поскольку функция φ должна принимать равные значения при возрастании λ на 2π, то $B=0$. Поэтому при $s=0$ множитель, зависящий от λ, сводится к постоянной. Уравнение (11) при этом будет иметь вид

$$(1-\mu^2)\Theta'' - 2(s+1)\mu\Theta' + (n-s)(n+s+1)\Theta = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя (16), получим уравнение

$$(1-\mu^2)\Theta''' - 2(s+2)\mu\Theta'' + (n-s-1)(n+s+2)\Theta' = 0, \quad (17)$$

которое совпадает с уравнением (16), если заменить Θ на Θ' и s на $s+1$. При этом не предполагается, что s положительно. Определив функцию G как решение уравнения

$$(1-\mu^2)G'' + 2n\mu G' = 0, \quad (18)$$

получающегося из (16) при $s+1=-n$, мы видим, что

$$\Theta = \frac{d^{n+s+1}}{d\mu^{n+s+1}}G \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению (16). Из (18) находим

$$G'' \sim (\mu^2 - 1)^n, \tag{20}$$

и поэтому

$$\Theta \sim \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2 - 1)^n. \tag{21}$$

Таким образом, мы получаем семейство решений уравнения Лапласа в сферических полярных координатах в виде

$$r^{n-s} (x + iy)^s \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2 - 1)^n, \tag{22}$$

или, что то же самое,

$$r^n \sin^s \theta (\cos s\varphi, \ \sin s\varphi) \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2 - 1)^n. \tag{23}$$

Мы получили пока лишь одно решение уравнения (16). Второе решение можно получить, полагая $s = n$. При этом полученное ранее решение сводится к постоянной, а вторым решением будет

$$\Theta' \sim (\mu^2 - 1)^{-(n+1)}. \tag{24}$$

Интеграл $(n - s + 1)$-го порядка от этой функции при $s \leqslant n$ в точках $\mu = \pm 1$ обращается в бесконечность, как $\sin^{-2s}\theta$, и содержит логарифм. Поэтому такое решение неприемлемо на всей сфере. Оно находит, однако, другие применения и будет рассмотрено далее в главе о *функциях Лежандра*.

Не вычисляя пока постоянных множителей для $s \neq 0$, обозначим полученные решения через $r^n p_n^s(\mu)(\cos s\lambda, \ \sin s\lambda)$, $r^n q_n^s(\mu)(\cos s\lambda, \ \sin s\lambda)$. При $s = 0$ постоянная выбирается так, чтобы $p_n^0(1) = 1$.

Вернемся теперь к уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -\varkappa^2 \varphi \tag{25}$$

и положим

$$\varphi = RS_n(\theta, \ \lambda), \tag{26}$$

где функция $r^n S_n(\theta, \lambda)$ является решением уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$. Мы получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) \frac{R}{r^2} = -\varkappa^2 R. \tag{27}$$

Подставляя

$$R = r^{-1/2} K, \tag{28}$$

получим

$$r^2 \frac{d^2K}{dr^2} + r \frac{dK}{dr} + \left[\varkappa^2 r^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] K = 0, \tag{29}$$

откуда следует, что

$$K = AJ_{n+1/2}(\varkappa r) + BY_{n+1/2}(\varkappa r). \tag{30}$$

Поэтому искомым решением будет

$$\varphi = r^{-1/2}\left[J_{n+1/2}(\varkappa r),\ Y_{n+1/2}(\varkappa r)\right]\left[p_n^s(\cos\theta),\ q_n^s(\cos\theta)\right](\cos s\lambda,\ \sin s\lambda). \tag{31}$$

Функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного целого числа, могут быть выражены через элементарные функции.

18.062. Сфероидальные координаты — случай сжатого сфероида.

Выразим координаты $\bar{\omega}$, z через ξ, η при помощи соотношений

$$\bar{\omega} = c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta, \qquad z = c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta \tag{1}$$

и снова будем искать решение в виде

$$\varphi = FM = F(\xi, \eta)\,\bar{\omega}^s(\cos s\lambda,\ \sin s\lambda). \tag{2}$$

При этом

$$ds_1 = h\,d\xi, \quad ds_2 = h\,d\eta, \quad ds_3 = \bar{\omega}\,d\lambda, \tag{3}$$

где

$$h^2 = c^2(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta). \tag{4}$$

Мы получим

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h^2\bar{\omega}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\bar{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\bar{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{h^2}{\bar{\omega}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\right], \tag{5}$$

$$\nabla^2 F = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\bar{\omega}}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\xi}\frac{\partial F}{\partial\xi} + \frac{1}{\bar{\omega}}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\eta}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right), \tag{6}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + \mathrm{th}\,\xi\frac{\partial F}{\partial\xi} - \mathrm{tg}\,\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_1}\frac{\partial M}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s_2}\frac{\partial M}{\partial s_2} = \frac{sM}{h^2}\left(\mathrm{th}\,\xi\frac{\partial F}{\partial\xi} - \mathrm{tg}\,\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}\right), \tag{8}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{M}{h^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + (2s+1)\,\mathrm{th}\,\xi\frac{\partial F}{\partial\xi} - (2s+1)\,\mathrm{tg}\,\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}\right]. \tag{9}$$

Если

$$F = X(\xi)\,Y(\eta), \quad \nabla^2\varphi = -\varkappa^2\varphi, \tag{10}$$

то

$$\frac{1}{X}\left[\frac{d^2X}{d\xi^2} + (2s+1)\,\mathrm{th}\,\xi\frac{dX}{d\xi}\right] + \frac{1}{Y}\left[\frac{d^2Y}{d\eta^2} - (2s+1)\,\mathrm{tg}\,\eta\frac{dY}{d\eta}\right] = -\varkappa^2c^2(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta), \tag{11}$$

откуда следует

$$\frac{d^2X}{d\xi^2} + (2s+1)\,\mathrm{th}\,\xi\frac{dX}{d\xi} + (\varkappa^2c^2\,\mathrm{ch}^2\xi - R)\,X = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2} - (2s+1)\,\mathrm{tg}\,\eta\frac{dY}{d\eta} - (\varkappa^2c^2\cos^2\eta - R)\,Y = 0, \tag{13}$$

где R — постоянная.

Полагая в уравнении (13) $\sin\eta=\mu$, получим уравнение

$$(1-\mu^2)\frac{d^2Y}{d\mu^2}-2(s+1)\mu\frac{dY}{d\mu}+[R-\varkappa^2c^2(1-\mu^2)]\,Y=0, \qquad (14)$$

которое с точностью до члена, пропорционального $\varkappa^2$, совпадает с уравнением для функции Θ в сферических полярных координатах при $R=(n-s)(n+s+1)$. Аналогично, полагая в уравнении (13) $i\operatorname{sh}\xi=\nu$, получим уравнение

$$(1-\nu^2)\frac{d^2X}{d\nu^2}-2(s+1)\nu\frac{dX}{d\nu}+[R-\varkappa^2c^2(1-\nu^2)]\,X=0, \qquad (15)$$

совпадающее с уравнением (14). Поэтому при $\varkappa^2=0$

$$X\operatorname{ch}^s\xi=Ap_n^s(i\operatorname{sh}\xi)+Bq_n^s(i\operatorname{sh}\xi), \qquad (16)$$

$$Y\cos^s\eta=Cp_n^s(\sin\eta)+Dq_n^s(\sin\eta). \qquad (17)$$

и мы получаем решение уравнения Лапласа. Наличие члена с $\varkappa^2$ существенно усложняет решение других уравнений.

18.063. Сфероидальные координаты — случай вытянутого сфероида. Полагая

$$\bar{\omega}=c\operatorname{sh}\xi\sin\eta,\quad z=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta \qquad (1)$$

и проводя такие же вычисления, как в предыдущем случае, получим

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+(2s+1)\operatorname{cth}\xi\frac{dX}{d\xi}+(\varkappa^2c^2\operatorname{sh}^2\xi-R)\,X=0, \qquad (2)$$

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2}+(2s+1)\operatorname{ctg}\eta\frac{dY}{d\eta}+(\varkappa^2c^2\sin^2\eta+R)\,Y=0. \qquad (3)$$

В уравнении (3) сделаем замену переменного $\cos\eta=\mu$. Тогда

$$(1-\mu^2)\frac{d^2Y}{d\mu^2}-2(s+1)\mu\frac{dY}{d\mu}+[\varkappa^2c^2(1-\mu^2)+R]\,Y=0. \qquad (4)$$

Уравнение (2) после замены переменного $\operatorname{ch}\xi=\nu$ примет вид

$$(\nu^2-1)\frac{d^2X}{d\nu^2}+2(s+1)\nu\frac{dX}{d\nu}+[\varkappa^2c^2(\nu^2-1)-R]\,X=0. \qquad (5)$$

В этом случае величины ν и μ могут быть представлены в виде

$$\nu=\frac{r_1+r_2}{2c},\quad \mu=\frac{r_1-r_2}{2c}, \qquad (6)$$

где r_1 и r_2 — расстояния до фокусов $(0,\,0,\,\pm c)$. При

$$R=(n-s)(n+s+1),\qquad \varkappa=0. \qquad (7)$$

Решения уравнений (4) и (5) могут быть записаны в виде

$$X \operatorname{sh}^s \xi = A p_n^s(\operatorname{ch}\xi) + B q_n^s(\operatorname{ch}\xi), \tag{8}$$

$$Y \sin^s \eta = C p_n^s(\cos\eta) + D q_n^s(\cos\eta). \tag{9}$$

Так же как и для случая, рассмотренного в **18.062**, решение q_n^s недопустимо внутри эллипсоида, если значение $\xi = 0$ лежит в рассматриваемой области. В обоих случаях $h^2 = 0$ при $\xi = \eta = 0$, и можно установить, что при этих значениях градиент функции $p_n^s q_n^s$ стремится к бесконечности *). Таким образом, *внутри* сплюснутого эллипсоида вращения решение имеет вид $p_n^s(i \operatorname{sh}\xi)\, p_n^s(\sin\eta)$, а внутри вытянутого эллипсоида вращения решение имеет вид $p_n^s(\operatorname{ch}\xi)\, p_n^s(\cos\eta)$. Однако в тех задачах, где рассматривается область, внешняя относительно эллипсоида, координата ξ может быть бесконечно велика. Если решение задачи не стремится к бесконечности на больших расстояниях, то решения p_n^s недопустимы, а q_n^s становятся допустимыми, поскольку ξ не обращается в 0 в рассматриваемой области и функция $q_n^s(\nu)$ может быть определена всюду, кроме интервала $-1 < \nu < 1$, так, чтобы она стремилась к 0 при больших значениях $|\nu|$. Во внешней области решения будут иметь вид $q_n^s(i \operatorname{sh}\xi)\, p_n^s(\sin\eta)$ и $q_n^s(\operatorname{ch}\xi) \times p_n^s(\cos\eta)$ соответственно.

18.07. Переменные разделяются также в случае общих эллипсоидальных координат. В этом случае решение сводится к функциям Ляме, являющимся обобщением функций Матье [1].

18.08. Соотношения ортогональности. Для двух функций φ и φ', имеющих непрерывные вторые производные в некоторой области, справедливо соотношение

$$\int\int\int (\varphi \nabla^2 \varphi' - \varphi' \nabla^2 \varphi)\, d\tau = \int\int \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS. \tag{1}$$

Первый интеграл берется по области, а второй — по ее границе; dn — направление внешней нормали к области. Если функции φ и φ' удовлетворяют уравнению Лапласа внутри области, то из соотношения (1) следует

$$\int\int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS = \int\int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{2}$$

Возьмем в качестве поверхности S сферу и положим

$$\varphi = r^m S_m(\theta, \lambda), \quad \varphi' = r^n S_n(\theta, \lambda). \tag{3}$$

*) Это детально показано в [4].

Тогда соотношение (3) примет вид

$$m \int\int r^{m+n-1} S_m S_n \, dS = n \int\int r^{m+n-1} S_m S_n \, dS, \tag{4}$$

причем r сохраняет постоянное значение на поверхности. Поэтому при $m \neq n$ справедливо соотношение

$$\int\int S_m S_n \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0. \tag{5}$$

Смысл соотношения (5) можно выразить, сказав, что любые *две поверхностные гармоники, степени которых различны, ортогональны.* Это является аналогией на сфере соотношений типа $\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0$ и других подобных соотношений, которые справедливы при $m \neq n$.

Если функции φ и φ' вместо уравнения Лапласа удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi = -\varkappa^2 \varphi, \qquad \nabla^2 \varphi' = -\varkappa'^2 \varphi' \tag{6}$$

и обе функции удовлетворяют на поверхности области S граничным условиям вида

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial n} + b\varphi = 0, \tag{7}$$

где постоянные a и b одни и те же для обоих решений, то в случае, когда a или b равно нулю, оба интеграла $\int\int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS$ и $\int\int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ обращаются в нуль. Если ни a, ни b не равны нулю, то выполняется соотношение

$$\int\int \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS = -\frac{b}{a} \int\int (\varphi\varphi' - \varphi'\varphi) \, dS = 0. \tag{8}$$

Поэтому

$$\int\int\int (\varphi \nabla^2 \varphi' - \varphi' \nabla^2 \varphi) \, d\tau = 0 \tag{9}$$

или

$$(\varkappa^2 - \varkappa'^2) \int\int\int \varphi\varphi' \, d\tau = 0, \tag{10}$$

и поэтому либо $\varkappa^2 = \varkappa'^2$, либо

$$\int\int\int \varphi\varphi' \, d\tau = 0. \tag{11}$$

Эти соотношения представляют собой еще одну систему соотношений ортогональности. Типичные для кругового цилиндра

решения имеют вид $J_m(\varkappa\bar{\omega})\cos m\lambda$, $J_n(\varkappa'\bar{\omega})\cos n\lambda$, причем числа $\varkappa$ и $\varkappa'$ могут быть выбраны так, чтобы на границе $\bar{\omega}=a$ выполнялись условия

$$J_m(\varkappa a)=0, \qquad J_n(\varkappa' a)=0,$$

или

$$J'_m(\varkappa a)=0, \qquad J'_n(\varkappa' a)=0. \tag{12}$$

Тогда при $\varkappa \neq \varkappa'$ справедливо соотношение

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m(\varkappa\bar{\omega})\, J_n(\varkappa'\bar{\omega}) \cos m\lambda \cos n\lambda\bar{\omega}\, d\bar{\omega}\, d\lambda = 0. \tag{13}$$

Оно заведомо справедливо при $m \neq n$. При $m=n$ из (13) вытекает соотношение

$$\int_0^a \bar{\omega} J_m(\varkappa\bar{\omega})\, J_m(\varkappa'\bar{\omega})\, d\bar{\omega} = 0, \tag{14}$$

если числа $\varkappa$ и $\varkappa'$ являются различными корнями уравнений $J_m(\varkappa a)=0$, $J'_m(\varkappa a)=0$, или же некоторого уравнения вида $\alpha J_m(\varkappa a)+\beta\varkappa J'_m(\varkappa a)=0$.

Аналогичные соображения для случая сферической области, внутри которой типичное решение имеет вид $r^{-1/2}J_{n+1/2}(\varkappa r)\, P_n^s \times$ $\times(\cos\theta)\cos s\lambda$, приводят к соотношению

$$\int_0^a r J_{m+1/2}(\varkappa r)\, J_{m+1/2}(\varkappa' r)\, dr = 0, \tag{15}$$

где $\varkappa$ и $\varkappa'$ являются различными корнями уравнений $J_{m+1/2}(\varkappa a)=0$, $J'_{m+1/2}(\varkappa a)=0$ или

$$\alpha \frac{J_{m+1/2}(\varkappa a)}{a^{1/2}} + \beta \frac{\partial}{\partial a} \frac{J_{m+1/2}(\varkappa a)}{a^{1/2}} = 0.$$

С помощью соотношений ортогональности немедленно определяются коэффициенты разложения в ряд по характеристическим решениям в предположении, что такой ряд сходится. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — характеристические решения (образующие в общем случае трехмерную систему). Предположим, что функция $f(x, y, z)$ допускает разложение в ряд вида

$$f(x, y, z) = \sum a_m \varphi_m. \tag{16}$$

Тогда из соотношений ортогональности вытекает

$$\int\int\int f(x, y, z)\varphi_n\, d\tau = \int\int\int \left(\sum a_m\varphi_m\right)\varphi_n\, d\tau = a_n \int\int\int \varphi_n^2\, d\tau, \tag{17}$$

откуда определяется коэффициент a_n. Однако доказательство существования разложения типа (16) длинное и довольно сложное. Для этого могут быть использованы два метода: метод Штурма — Лиувилля, основанный на непосредственном изучении свойств дифференциального уравнения [5], и метод функций Грина, использующий теорию интегральных уравнений [6]. При этом требования, налагаемые на функцию f, аналогичны тем, которые используются в теоремах о рядах Фурье. Метод интегральных уравнений весьма красив, но, к сожалению, он слишком длинен, чтобы изложить его в этой книге.

18.09. Потенциал во внешних точках: формула Мак-Кулло. Возьмем начало отсчета O внутри некоторой области распределения плотности; точка $P(x_i = rl_i)$ является внешней относительно этого распределения, а точка $Q(x'_i = r'l'_i)$ — внутренней. Положим $PQ = R$. Потенциал в точке P, вызванный распределением плотности электрического заряда, равен

$$\varphi = \gamma \int\int\int \rho \frac{d\tau}{R} + \gamma \int\int \sigma \frac{dS}{R}. \tag{1}$$

При $r' < r$, обозначая через θ угол POQ, разлагаем величину $1/R$ в ряд

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2}} = \frac{1}{r} + \frac{r'\cos\theta}{r^2} + \frac{r'^2(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} + \ldots. \tag{2}$$

Будем рассматривать только объемный интеграл, поскольку вычисления для поверхностного интеграла проводятся совершенно аналогично. Поскольку

$$\cos\theta = l_i l'_i, \tag{3}$$

то

$$\varphi = \gamma \int\int\int \rho \frac{d\tau}{r} + \gamma \int\int\int \rho r' \frac{l'_i l_i}{r^2} d\tau + \\ + \gamma \int\int\int \rho r'^2 \frac{3l_i l'_i l_k l'_k - 1}{2r^3} d\tau + \ldots. \tag{4}$$

В этой формуле величина

$$\int\int\int \rho \, d\tau = M \tag{5}$$

представляет собой полную массу или заряд. Коэффициент при $\gamma l_i / r^2$, равный

$$\int\int\int \rho x'_i \, d\tau = M\bar{x}_i, \tag{6}$$

может быть обращен в нуль, если выбрать начало координат в центре масс или в центре зарядов, для случая, когда $M \neq 0$.

(Как правило, не отмечается то обстоятельство, что в электростатике существует центр заряда для системы заряженных тел, являющийся полным аналогом центра масс.) Коэффициент при γr^{-3} равен

$$\int\int\int \tfrac{1}{2}\rho\left(3l_i l_k x'_i x'_k - r'^2\right)d\tau = \tfrac{1}{2} l_i l_k \int\int\int \rho\left(3x'_i x'_k - r'^2\delta_{ik}\right)d\tau. \qquad (7)$$

Определяя тензор моментов инерции (или тензор инерции) I_{ik} относительно точки O равенством

$$I_{ik} = \int\int\int \rho\left(r'^2\delta_{ik} - x'_i x'_k\right)d\tau, \qquad (8)$$

мы можем соотношение (7) записать в виде

$$-\tfrac{3}{2} l_i l_k I_{ik} + \int\int \rho r'^2\, d\tau.$$

Но величина $I_{ik}l_i l_k$ является моментом инерции относительно оси OP. Обозначая его через I, а главные значения момента инерции относительно точки O через A, B, C, мы получаем известную *формулу Мак-Кулло*

$$\varphi = \gamma\frac{M}{r} + \frac{\gamma}{2r^3}(A + B + C - 3I) + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \qquad (9)$$

Обобщая очевидным образом рассуждение, мы получим силовую функцию двух гравитирующих тел, центры масс которых находятся на расстоянии r друг от друга, в виде

$$\gamma\left[\frac{MM'}{r} + \frac{M'}{2r^3}(A + B + C - 3I) + \frac{M}{2r^3}(A' + B' + C' - 3I')\right] + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \qquad (10)$$

Формула Мак-Кулло оказывается справедливой вплоть до поверхности гравитирующего тела, в том случае когда эта поверхность является эллипсоидом, причем квадратом сжатия этого эллипсоида можно пренебречь. Однако обоснование этого утверждения проводится совершенно другим способом, чем это было сделано выше, и требует теории разложения по сферическим гармоникам на сфере (**24.06**).

В случае $M = 0$ очевидно, что первый член формулы (4) обращается в нуль и выбор начала отсчета не влияет на величину второго члена, поскольку члены, появляющиеся при изменении начала отсчета, умножаются на величину M, равную нулю. Этот случай возникает в теории магнетизма и в некоторых задачах о диэлектриках. В сферических полярных координатах член, пропорциональный $1/r^2$, равен

$$\frac{\gamma}{r^2}\int\int\int \rho r' \left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')\right]d\tau,$$

а член, пропорциональный $1/r^3$, имеет тот же вид, что и ранее, однако моменты следует взять относительно той же точки, которая была принята в качестве начала отсчета для члена, пропорционального $1/r^2$.

ПРИМЕРЫ

1. Пусть $f(\zeta)$ — аналитическая функция ζ в области R, содержащей начало координат и отрезок вещественной оси, и пусть z, $\bar{\omega}$, λ — цилиндрические координаты. Доказать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} f(z + i\bar{\omega}\cos\alpha)\, d\alpha$$

является потенциальной функцией в соответствующей области изменения переменных z и $\bar{\omega}$.

Полагая функцию $f(\zeta) = \operatorname{arctg}(a/\zeta)$ или каким-либо иным способом, проверить, что распределение свободного заряда на проводящем круговом диске $z = 0$, $\bar{\omega} \leqslant a$ имеет поверхностную плотность, пропорциональную $(a^2 - \bar{\omega}^2)^{-1/2}$, и показать, что емкость этого диска равна $2a/\pi$. (М. Т., 1935.)

2. Шесть равных точечных зарядов e расположены на осях координат на одинаковых расстояниях a от начала, в точках, являющихся вершинами правильного октаэдра. Требуется разложить созданный ими потенциал вблизи начала координат.

Доказать, что а) разложение потенциала должно быть инвариантно относительно изменения знака и перестановок координат (x, y, z); б) первые члены разложения могут быть записаны в виде $A + Br^2 + Cr^4 + D(x^4 + y^4 + z^4)$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; в) из того, что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, следует $B = 0$, $C = -\,{}^3/_5 D$. Вычисляя потенциал в точке $(x, 0, 0)$ для $x \ll a$, показать, что коэффициент D положителен, и найти его значение. Получить разложение потенциала, если вместо шести равных зарядов имеется восемь зарядов, расположенных в вершинах куба с ребрами $2b$, центр которого находится в начале координат, а ребра параллельны осям координат. Показать, что в этом случае коэффициент D отрицателен. (М/с, II, 1938.)

3. Показать, что энергия взаимодействия двух малых магнитов с магнитными моментами $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$, центры которых расположены в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, равна

$$\frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{3[\boldsymbol{\mu}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)][\boldsymbol{\mu}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^5}.$$

4. Показать, что решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям

$$V = 0 \qquad (x = 0,\ x = a),$$
$$V = x^2(a^2 - x^2) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a,\ t = 0),$$
$$V \to 0 \qquad (t \to \infty),$$

имеет вид

$$V = 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1}\left(\frac{5}{n^3\pi^3} - \frac{12}{n^5\pi^5}\right) - \left(\frac{1}{n^3\pi^3} + \frac{12}{n^5\pi^5}\right)\right] e^{-n^2\pi^2h^2t/a^2} \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

(I. C., 1944.)

5. Получить решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z$$

вида $z = f(x)\, g(y)$ при условиях $z = 0$ при $x = 0$, $y = 0$ и $\partial z/\partial x = 0$ при $x = \pi$.

6. Прямоугольник имеет стороны a и b. На этих сторонах задана температура 0 и 1 соответственно. Найти установившееся значение температуры в любой точке и показать, что в центре прямоугольника значение температуры равно

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \operatorname{sch} (2n+1) \frac{\pi a}{2b}.$$

(I. C., 1944.)

7. Круговая мембрана радиуса a закреплена по краям и подвержена однородному напряжению P. Показать, что потенциальная энергия, выраженная через симметрично распределенное нормальное смещение, имеет вид

$$V = \frac{1}{2} P \int_0^a \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 2\pi r\, dr.$$

Полагая

$$z = C\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 + \beta \frac{r^2}{a^2}\right)$$

и подбирая β, оценить максимально возможный период колебаний.

(I. C., 1940.)

8. Плоский кусок теплопроводящего материала ограничен дугой эллипса и его большой осью. Криволинейная граница поддерживается при температуре V_1, а прямолинейная — при температуре V_2. Найти установившееся значение температуры в любой точке материала. (I. C., 1940.)

9. Пусть на поверхности заряженного проводника потенциал равен φ_s. Доказать, что в теле существует такая точка, что на больших расстояниях r от этой точки потенциал имеет вид

$$\varphi = \frac{c\varphi_s}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

где c — электростатическая емкость тела.

Два проводника с емкостями c_1, c_2, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, имеют заряды e_1, e_2 и потенциалы φ_1, φ_2. Доказать, что потенциальная энергия V имеет вид

$$2V = \frac{e_1^2}{c_1} + \frac{e_2^2}{c_2} + \frac{2e_1e_2}{r} + O\left(\frac{1}{r_3}\right) = \left(1 + \frac{c_1c_2}{r^2}\right)\left(c_1\varphi_2^2 + c_2\varphi_1^2\right) - \frac{2c_1c_2\varphi_1\varphi_2}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

где r — расстояние между центрами зарядов проводников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Webster A. G.*, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, ch. 6. (Русский перевод: *Вебстер А. Г., Сеге Г.*, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, М.—Л., Гостехиздат, 1933.)
2. *Taylor G. I., Maccoll J. W.*, Proc. Roy. Soc., **A139**, 278—311 (1933).

3. *Whittaker E. T., Watson G. N.*, Modern Analysis, 1915. (Русский перевод: *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.*, Курс современного анализа, М., ОНТИ, 1934.)
4. *Hobson E. W.*, Spherical and Ellipsoidal Harmonics, 1931, p. 422. (Русский перевод: Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, М., ИЛ, 1952.)
5. *Ince E. L.*, Ordinary Differential Equations, Math. Ann., **63**, 433—476 (1907). (Русский перевод: *Айнс Э. Л.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИ Украины, Харьков, 1939.)
6. *Schmidt E.*, Math. Ann., **63**, 433—476 (1907); *Kneser A.*, там же, p. 477—524. *Smithies F.*, Proc. Lond. Math. Soc., **43**, 255—279 (1937).
7. *Love A. E. H.*, Elasticity, 1905, p. 56. (Русский перевод: *Ляв А. Е. Г.*, Математическая теория упругости, М. — Л., ОНТИ, 1935.)
8. *Bickley W. G.*, Phil. Mag. (7), **30**, 310—322 (1940).
9. *McLachlan N. W.*, Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford, 1947. (Русский перевод: *Мак-Лахлан Н. В.*, Теория и приложение функций Матье, М., ИЛ, 1953.)

Глава 19

ВОЛНЫ В ОДНОМ ИЗМЕРЕНИИ И ВОЛНЫ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

19.01. Колеблющаяся струна: решение Даламбера. Обширный класс физических задач связан с дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где t — время, x — расстояние от данной точки или плоскости и c — известная скорость. Общее решение этого уравнения было получено Даламбером. Введем новые переменные

$$u = x - ct, \quad v = x + ct \tag{2}$$

и, преобразовав дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{3}$$

Из этого следует, что $\partial y/\partial v$ не зависит от u и, следовательно, есть функция только v; интегрируя снова, мы приходим к тому, что y должно иметь вид

$$y = f(u) + g(v) = f(x - ct) + g(x + ct). \tag{4}$$

Далее, любые функции f и g, подставленные в это уравнение, будут решениями (1) при условии, что они дважды дифференцируемы.

Рассмотрим однородную струну под натяжением P с массой ρ на единицу длины и положим, что она смещена в поперечном направлении так, что смещение y и его градиент $\partial y/\partial x$ малы во всех точках. Тогда с точностью до малых первого порядка поперечная компонента натяжения равна $P\,\partial y/\partial x$ и передает поперечный импульс к части струны слева от x со скоростью $P\,\partial y/\partial x$. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \rho \dot{y}\, dx = P \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0^x \tag{5}$$

и, дифференцируя по x (мы считаем это допустимым), получим

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{6}$$

что имеет тот же вид, что (1), при $c^2 = P/\rho$. Однако уравнение (5), имеющее для физики более важное значение, требует только предположения, что y дифференцируемо по x и t,

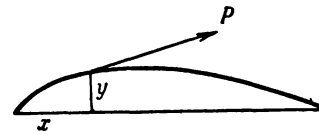

Рис. 62.

а $\int \dot{y}\,dx$ — по t. Подставим теперь $y = f(x - ct)$ в (5), предполагая, что $f(x - ct)$ имеет интегрируемую производную. Мы получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \rho \frac{\partial}{\partial t} f(x - ct)\,dx = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \rho c f'(x - ct)\,dx =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \rho c \left[f(x - ct) - f(-ct)\right] = \rho c^2 \left[f'(x - ct) - f'(-ct)\right] =$$

$$= P \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x - ct)\right]_0^x. \tag{7}$$

Отсюда выражению (5) может удовлетворить однократно дифференцируемая функция $f(x - ct)$ или точно так же $g(x + ct)$; следовательно, (4) удовлетворяет физическим условиям и без обязательного предположения о том, что y дважды дифференцируемо. Это имеет некоторое значение, так как (4) обычно принимается как решение волновых задач и в случаях, где вторые производные, требуемые в (1), не существуют. Дифференцирование по x, необходимое для получения (1) или (6), — просто математическое средство представления задачи в удобной форме, подсказывающее решение, но не доказывающее, что оно правильно во всех интересующих нас случаях. Доказательство, что предложенное решение удовлетворяет механическим условиям и в случае, когда существуют только первые производные, требует дальнейшей аргументации, приводящей к (7).

Можно отметить, что для такого ограничения, требующего существования первой производной во всех точках, нет оснований. Производные могут иметь конечные разрывы при

некоторых x или t. Просмотрев опять вывод (7), мы замечаем, что он остается правильным, если ни $x-ct$, ни $-ct$ не являются точками разрыва $f(x-ct)$. Даже в точках, где производная разрывна, значение $f(x-ct)$ может быть получено, исходя из того, что $f(x-ct)$ непрерывно. Следовательно, решение в форме (4) существует, если, например, струна возмущена так, что имеет вид нескольких прямых отрезков. В этом случае вторые производные в (1) равны нулю всюду, кроме точек, где наклон разрывно изменялся, и вторая производная не существует, так что (4) теряет смысл, но механическая задача тем не менее имеет определенное решение.

Мы определяем функции $f(x-ct)$ и $g(x+ct)$ так, чтобы они соответствовали заданным значениям y и $\dot{y}$, когда $t=0$. Если в начальный момент $y=\varphi(x)$, то, очевидно, что

$$\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]$$

равно $\varphi(x)$ при $t=0$ для всех x, и ее первая производная по t равна нулю. Кроме того, $\psi(x+ct)-\psi(x-ct)=0$ при $t=0$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\psi(x+ct)-\psi(x-ct)]=\frac{1}{2}c[\psi'(x+ct)+\psi'(x-ct)]\to c\psi'(x).$$

Отсюда, если $\dot{y}=\chi(x)$ при $t=0$ и мы примем

$$\psi'(x)=\frac{1}{c}\chi(x),\quad \psi(x)=\frac{1}{c}\int^{x}\chi(x)\,dx,$$

то $\frac{1}{2}[\psi(x+ct)-\psi(x-ct)]$ не даст вклада в y при $t=0$ и даст правильное значение $\dot{y}$. Далее,

$$\psi(x+ct)-\psi(x-ct)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\chi(x)\,dx.$$

Следовательно, решение, которое обеспечивает $y=\varphi(x)$, $\dot{y}=\chi(x)$, при $t=0$ имеет вид

$$y=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\chi(x)\,dx. \tag{8}$$

Это решение Даламбера. Оно является наиболее общим из возможных решений, но в предложенной форме пригодно при бесконечно больших t только для струны, уходящей в обе стороны в бесконечность и не подвергаемой внешним воздействиям.

Если струна заключена между $x=0$ и $x=l$, то мы располагаем данными о значениях y и $\dot{y}$ в момент времени $t=0$ для точек между $x=0$ и $x=l$; для любого положительного t, ка-

ким бы малым оно ни было, найдутся такие значения x между 0 и l, для которых $x-ct<0$, а также такие, для которых $x+ct>l$. Но у струны конечной длины в общем случае будут существовать силы на концах, например когда концы закреплены. Проблема, следовательно, заключается в следующем: чтобы найти положение струны при положительных t, необходимы значения функций φ и χ вне первоначальной области определения; однако мы вместо этого располагаем данными о смещениях концов в любой момент времени. Для точной постановки задачи примем, что концы закреплены; тогда если мы выберем φ и ψ вне заданного диапазона так, что y, определенное в (8), исчезает при $x=0$ и l для всех t, то удовлетворим уравнению движения струны и условиям на концах и, следовательно, получим решение задачи. Математически это означает, что функции φ и ψ произвольны вне интервала $0\leqslant x\leqslant l$, и их выбирают таким образом, чтобы решение удовлетворяло условиям на концах. С физической точки зрения можно представить конечную струну бесконечной и выбрать начальные смещения и скорости последней так, чтобы концы не двигались. Мы ожидаем, что внутри интервала $0\leqslant x\leqslant l$ решение останется тем же, что и для конечной струны, ограниченной силами на концах так, чтобы они были неподвижны. В одном случае силы возникают из-за реакций в опорах, во втором — из-за натяжений во внешних частях струны. Условия, налагаемые на φ и χ, видны из (8): обе они должны быть антисимметричными относительно $x=0$ и $x=l$, т. е.

$$\begin{aligned} &\varphi(-x)=-\varphi(x), \quad \varphi(2l-x)=-\varphi(x),\\ &\chi(-x)=-\chi(x), \quad \chi(2l-x)=-\chi(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Для закрепленных концов эти уравнения дают сразу полное решение. Когда концы не закреплены, например когда один из них имеет точечную массу и свободен, экстраполяции менее очевидны, и простейшим методом решения является операционный метод.

Если мы рассмотрим отдельно $f(x-ct)$, то увидим, что значение функции не изменится, если увеличить t на τ и x на $c\tau$. Следовательно, часть смещения, описываемая этим членом, может рассматриваться как волна, движущаяся с постоянной скоростью c в направлении x. Можно считать, что этот член описывает *бегущую волну*. Аналогично можно считать, что член $g(x+ct)$ описывает волну, бегущую со скоростью c в направлении убывающих x.

19.02. Операторное решение для струны с закрепленными концами. Рассмотрим подробнее случаи, когда струна длиной l

первоначально оттянута в сторону на расстояние η в точке $x=b$ так, что образуются два прямолинейных отрезка, а затем освобождена. Тогда если y_0 — начальное смещение, то

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\eta x}{b} \qquad (0 \leqslant x \leqslant b), \\ y_0 &= \frac{\eta (l-x)}{l-b} \qquad (b \leqslant x \leqslant l) \end{aligned} \tag{1}$$

и начальная скорость равна 0. Отсюда вспомогательное уравнение будет

$$p^2 y - c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = p^2 y_0, \tag{2}$$

и мы решаем его, как если бы p было константой при условии, что $y=0$ при $x=0$ и $x=l$. Будем полагать, что операции выполняются над $H(t)$, если не утверждается противное. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} y &= \eta \frac{x}{b} + A \operatorname{sh} \frac{px}{c} \operatorname{sh} \frac{p}{c}(l-b) \qquad (0 \leqslant x \leqslant b), \\ y &= \eta \frac{l-x}{l-b} + A \operatorname{sh} \frac{pb}{c} \operatorname{sh} \frac{p}{c}(l-x) \quad (b \leqslant x \leqslant l). \end{aligned} \tag{3}$$

Константа A должна быть одинаковой в обоих выражениях для того, чтобы y было непрерывным в точке $x=b$. Разрыв $\partial y/\partial x$ в этой точке означал бы бесконечное ускорение, что невозможно из физических соображений. В особые моменты времени разрывы $\partial y/\partial x$ возможны, но они вызывают импульсные изменения скорости. Следовательно, мы выбираем A так, чтобы $\partial y/\partial x$ было в общем непрерывно в точке $x=b$. Это дает

$$\eta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{l-b} \right) + \frac{pA}{c} \left[\operatorname{ch} \frac{pb}{c} \operatorname{sh} \frac{p}{c}(l-b) + \operatorname{sh} \frac{pb}{c} \operatorname{ch} \frac{p}{c}(l-b) \right] = 0, \tag{4}$$

откуда

$$A = \frac{c}{p} \frac{l}{b(l-b)} \eta \operatorname{csch} \frac{pl}{c}. \tag{5}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y &= \frac{\eta l}{b(l-b)} \left[\frac{l-b}{l} x - \frac{c \operatorname{sh} px/c \operatorname{sh} p(l-b)/c}{p \operatorname{sh} pl/c} \right] \quad (0 \leqslant x \leqslant b), \\ y &= \frac{\eta l}{b(l-b)} \left[\frac{b}{l}(l-x) - \frac{c}{p} \frac{\operatorname{sh} pb/c \operatorname{sh} p(l-x)/c}{\operatorname{sh} pl/c} \right] \quad (b \leqslant x \leqslant l). \end{aligned} \tag{6}$$

Эти формулы сразу могут быть интерпретированы с помощью операционного правила разложения на элементарные дроби. Рассматривая первое выражение, мы видим, что если заменить p константой z и затем устремить z к нулю, то второй член сократится с первым. Поэтому в выражении не остается сла-

гаемых, не зависящих от t. В точках $zl/c = n\pi i$, где n — любое положительное или отрицательное целое число, не равное нулю, имеются полюса, и правило элементарных дробей для $0 \leqslant x \leqslant b$ дает

$$y = -\frac{\eta l}{b(l-b)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{l}{n\pi i} \frac{i \sin \frac{n\pi x}{l}\, i \sin \frac{n\pi (l-b)}{l}}{\frac{n\pi i c}{l} \frac{l}{c} \operatorname{ch} n\pi i} e^{n\pi i c t/l} =$$

$$= \frac{2\eta l^2}{b(l-b)} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi b}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l}. \qquad (7)$$

Решение для $b \leqslant x \leqslant l$ приводит к тому же выражению.

Каждый член суммы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (8)$$

Поэтому можно считать, что отдельные слагаемые описывают колебания с периодами $2l/nc$, с пропорциональным изменением смещений для всех значений x. Как и для систем с ограниченным числом степеней свободы, правило элементарных дробей приводит к разложению движения на нормальные колебания. Движение, соответствующее данному гармоническому по времени множителю, называется *стоячей волной*. Любая стоячая волна может быть заменена парой бегущих волн, так как

$$2 \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l} = \sin \frac{n\pi}{l}(x + ct) + \sin \frac{n\pi}{l}(x - ct). \qquad (9)$$

Аналогично любая бегущая волна может быть представлена как пара стоячих волн с фазами, сдвинутыми на $^1/_2\pi$, т. е.

$$\sin \frac{n\pi}{l}(x + ct) = \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l} + \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c t}{l}. \qquad (10)$$

Естественный способ доказать, что найденное решение удовлетворяет всем необходимым условиям, заключается в почленном дифференцировании решения и подстановке в (8). Но в данном случае этот метод не проходит, так как при двукратном дифференцировании мы получаем ряд, чьи члены осциллируют с конечным размахом с ростом n. Но если мы продифференцируем только раз, то получим сходящийся ряд, который можно поставить в **19.01**(5); не составляет особого труда показать, что **19.01**(5) справедливо. Можно поступить и иначе: разложить каждый член, как в (9); в этом случае ряды превращаются в сумму функций от $x - ct$ и от $x + ct$, каждая из которых однократно дифференцируема и, следовательно, удовлетворяет уравнению движения. При этом выполняются и условия на концах.

Поскольку каждый член исчезает при $x=0$ и $x=l$, ряд равномерно сходится, так как модуль его произвольного члена $\leqslant n^{-2}$, а сумма стремится к 0 при $x\to 0$ или l.

Ряд (7) сходится слишком медленно, чтобы его можно было использовать при фактическом расчете смещений. Другой метод вычислений заключается в следующем. Мы начинаем с интеграла Бромвича

$$-\frac{c}{p}\frac{\operatorname{sh} px/c \operatorname{sh} p(l-b)/c}{\operatorname{sh} pl/c}H(t)=-\frac{c}{2\pi i}\int\frac{\operatorname{sh} zx/c \operatorname{sh} z(l-b)/c}{z^2 \operatorname{sh} zl/c}e^{zt}\,dz, \quad (11)$$

где $\operatorname{Re}(z)=k>0$ на контуре L. Но тогда $|e^{-2zl/c}|<1$ на L и во всех точках справа от него, и мы можем разложить $\operatorname{csch} zl/c$ в сходящийся ряд геометрической прогрессии $2e^{-zl/c}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2nzl/c}$. Порядок интегрирования и суммирования можно изменить, и мы имеем

$$-\frac{c}{4\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_L e^{z(x-b)/c}(1-e^{-2zx/c})(1-e^{-2z(l-b)/c})e^{-2nlz/c}e^{zt}\frac{dz}{z^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}c\sum_{n=0}^{\infty}e^{p(x-b)/c}(1-e^{-2px/c})(1-e^{2p(l-b)/c})e^{-2pnl/c}\frac{1}{p}H(t), \quad (12)$$

а это результат разложения (11) при условии, что p — константа с положительной действительной частью. Поскольку

$$\frac{c}{p}H(t)=\begin{cases}0 & (t<0),\\ ct & (t>0),\end{cases} \quad (13)$$

и

$$e^{-ph/c}\frac{c}{p}H(t)=\begin{cases}0 & (ct<h),\\ ct-h & (ct>h),\end{cases} \quad (14)$$

первый член y в (3) равен $\eta x/b$ при $x\leqslant b$. Все члены (12) — нули до тех пор, пока не выполняется $ct=b-x$, так что

$$y=\frac{\eta x}{b} \quad (0<ct<b-x). \quad (15)$$

Когда $ct=b-x$, первый член в (12) начинает отличаться от нуля; он равен

$$-\frac{1}{2}e^{-p(b-x)/c}ctH(t)=-\frac{1}{2}(ct-b+x), \quad (16)$$

и

$$y=\frac{\eta x}{b}-\frac{1}{2}\frac{\eta l}{b(l-b)}(ct-b+x)=$$

$$=\frac{\eta l}{b(l-b)}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{l}\right)x-\frac{1}{2}(ct-b)\right]. \quad (17)$$

На этом этапе движения $\partial y/\partial x$ есть среднее из η/b и $-\eta/(l-b)$ — первоначальных наклонов двух частей струны. Сам этап начинается, когда волна, бегущая со скоростью c от b, достигает x, и продолжается до тех пор, пока член с $2px/c$ или $2p(l-b)/c$ перестает быть нулем. Первый член дает выражение

$$\frac{1}{2}e^{-p(b+x)/c}ctH(t)=\frac{1}{2}(ct-b-x) \qquad (b+x<ct), \tag{18}$$

и, прибавляя его к предыдущему вкладу, мы находим

$$y=-\frac{\eta x}{l-b}. \tag{19}$$

Начало этого этапа соответствует времени, необходимому, чтобы волна пробежала от b до 0 и, отразившись, вернулась к x. Часть струны, которую эта отраженная волна достигла, параллельна первоначальной позиции струны в интервале $b<x<l$.

Когда $ct=(b-x)+2(l-b)$, приходит волна, отраженная от конца $x=l$, и это дает

$$y=\frac{\eta l}{b(l-b)}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{l}\right)x+\frac{1}{2}(ct+b)-l\right]. \tag{20}$$

Это продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $ct=b+x+2(l-b)$; на последующем этапе

$$y=\frac{\eta l}{b(l-b)}x\left(1-\frac{b}{l}\right)=\frac{\eta x}{b}. \tag{21}$$

Когда $ct=2l$, вся струна возвращается в первоначальное положение; член с $e^{-2pl/c}$ начинает влиять на движение, и весь процесс повторится. Мы видим, что в любой момент струна имеет вид ломаной с тремя звеньями.

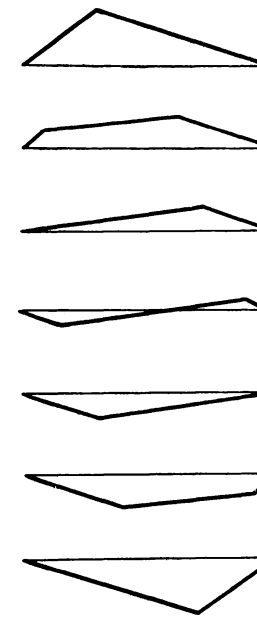

Рис. 63.

Два концевых звена параллельны двум участкам струны в их начальном положении и находятся в покое. Для среднего звена градиент $\partial y/\partial x$ — среднее из градиентов для концевых звеньев, а поперечная скорость равна $\pm\frac{1}{2}\frac{\eta lc}{b(l-b)}$. Средняя

часть всегда или увеличивается, или уменьшается на каждом конце со скоростью c.

Операционное правило элементарных дробей или разложение по экспонентам с отрицательными показателями являются альтернативными способами вычисления интеграла Бромвича. Первый разлагает движение на нормальные колебания, второй — на бегущие волны. В рассмотренной здесь задаче строгая периодичность позволяет с помощью разложения на волны выразить решение в виде конечной суммы для любого момента времени и поэтому явно более удобно. Однако в общем случае решение задачи о малых колебаниях может и не быть строго периодическим; тогда расчет с помощью бегущих волн станет более трудоемким, чем метод нормальных колебаний, если интересоваться движением лишь спустя значительное время после начала.

19.03. Решение для начального возмущения общего вида. Примем $y=\varphi(x)$, $\dot{y}=0$ при $t=0$. Тогда вспомогательное уравнение примет вид

$$p^2y - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p^2\varphi(x), \tag{1}$$

и мы будем искать решение, обращающееся в нуль при $x=0$ и $x=l$. Используя метод вариации постоянных, ищем решение в виде

$$y = A\operatorname{ch}\frac{px}{c} + B\operatorname{sh}\frac{px}{c}, \tag{2}$$

где A и B — функции x, подчиняющиеся соотношению

$$A'\operatorname{ch}\frac{px}{c} + B'\operatorname{sh}\frac{px}{c} = 0. \tag{3}$$

Подставляя в (1), находим

$$A'\operatorname{sh}\frac{px}{c} + B'\operatorname{ch}\frac{px}{c} = -\frac{p}{c}\varphi(x). \tag{4}$$

Следовательно,

$$A' = \frac{p}{c}\varphi(x)\operatorname{sh}\frac{px}{c}, \quad B' = -\frac{p}{c}\varphi(x)\operatorname{ch}\frac{px}{c}. \tag{5}$$

При $x=0$ $y=A(0)$; следовательно, так как $y=0$ при $x=0$, то

$$A = \int_0^x \frac{p}{c}\varphi(\xi)\operatorname{sh}\frac{p\xi}{c}\,d\xi.$$

Кроме того, так как $y=0$ при $x=l$,

$$B(l)\operatorname{sh}\frac{pl}{c} = -A(l)\operatorname{ch}\frac{pl}{c},$$

что определяет $B(l)$ и тем самым $B(x)$, так как мы знаем B' из (5). Имеем

$$B(x) = -\operatorname{cth}\frac{pl}{c}\int_0^l \frac{p}{c}\varphi(\xi)\operatorname{sh}\frac{p\xi}{c}\,d\xi + \int_x^l \frac{p}{c}\varphi(\xi)\operatorname{ch}\frac{p\xi}{c}\,d\xi.$$

Подставляя выражения для A и B в (2), имеем

$$y = \int_0^x \frac{p}{c}\varphi(\xi)\operatorname{sh}\frac{p\xi}{c}\,\frac{\operatorname{sh} p(l-x)/l}{\operatorname{sh} pl/c}\,d\xi + \int_x^l \frac{p}{c}\varphi(\xi)\operatorname{sh}\frac{px}{c}\,\frac{\operatorname{sh} p(l-\xi)/c}{\operatorname{sh} pl/c}\,d\xi = \tag{6}$$

$$= \int_{\xi=0}^{x} \varphi(\xi)\,\frac{\operatorname{sh} p(l-x)/c}{\operatorname{sh} pl/c}\,d\operatorname{ch}\frac{p\xi}{c} - \int_{\xi=x}^{l} \varphi(\xi)\,\frac{\operatorname{sh} px/c}{\operatorname{sh} pl/c}\,d\operatorname{ch}\frac{p(l-\xi)}{c}. \tag{7}$$

С помощью правила элементарных дробей получаем

$$\frac{\operatorname{sh} p(l-x)/c\operatorname{ch} p\xi/c}{\operatorname{sh} pl/c} = \frac{l-x}{l} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}, \tag{8}$$

$$\frac{\operatorname{sh} px/c\operatorname{ch} p(l-\xi)/c}{\operatorname{sh} pl/c} = \frac{x}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}. \tag{9}$$

Первые члены не зависят от ξ и не дают вклад в интегралы; отсюда

$$y = -2\int_{\xi=0}^{l}\varphi(\xi)\,d\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right). \tag{10}$$

Ряд представляет собой функцию с конечными разрывами, поэтому необходимо использовать интеграл Стилтьеса.

Если мы переменим порядок интегрирования и суммирования, а затем продифференцируем $\cos n\pi\xi/l$ в отдельных слагаемых суммы, то получим

$$y = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}\,d\xi. \tag{11}$$

Это — решение Фурье; приняв $t=0$, получим ряд по синусам

$$\varphi(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi. \tag{12}$$

Чтобы получить разложение на волны, используем

$$\frac{\operatorname{sh} p(l-x)/c \operatorname{ch} p\xi/c}{\operatorname{sh} pl/c} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-p(x-\xi)/c}(1-e^{-2p(l-x)/c})(1+e^{-2p\xi/c}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2npl/c} \quad (\xi < x), \quad (13)$$

$$\frac{\operatorname{sh} px/c \operatorname{ch} p(l-\xi)/c}{\operatorname{sh} ph/c} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-p(\xi-x)/c}(1+e^{-2px/c})(1-e^{-2p(l-\xi)/c}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2npl/c} \quad (\xi > x). \quad (14)$$

Во всех показателях в любом случае знак перед p отрицателен. Кроме того,

$$e^{-p(x-\xi)/c}(1-e^{-2p(l-x)/c})(1+e^{-2p\xi/c}) H(t) =$$

$$= H\left(t-\frac{x-\xi}{c}\right) - H\left(t-\frac{2l-x-\xi}{c}\right) +$$

$$+ H\left(t-\frac{x+\xi}{c}\right) - H\left(t-\frac{2l-x+\xi}{c}\right). \quad (15)$$

Это выражение постоянно, если не считать скачков на ± 1, когда аргументы единичных функций проходят через 0. Члены, соответствующие $n=0$, дают

$$y = \frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{x} \varphi(\xi)\, d\left[H\left(t-\frac{x-\xi}{c}\right) - H\left(t-\frac{2l-x-\xi}{c}\right) + \right.$$

$$\left. + H\left(t-\frac{x+\xi}{c}\right) - H\left(t-\frac{2l-x+\xi}{c}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\xi=x}^{l} \varphi(\xi)\, d\left[-H\left(t-\frac{\xi-x}{c}\right) + H\left(t-\frac{\xi+x}{c}\right) - \right.$$

$$\left. - H\left(t-\frac{2l-x-\xi}{c}\right) + H\left(t-\frac{2l+x-\xi}{c}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x-ct) - \varphi(2l-x-ct) - \varphi(ct-x) + \varphi(ct+x-2l)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\varphi(ct+x) - \varphi(ct-x) - \varphi(2l-x-ct) + \varphi(2l+x-ct)], \quad (16)$$

где должны быть учтены только такие члены, у которых значения ξ, обращающие аргументы единичных функций в 0, лежат в пределах интегрирования. Первый член в первой строке, очевидно, представляет собой прямую волну из точек между 0 и x, третий, который равен нулю до момента x/c, — волну, отраженную в точке $x=0$, и два других — отражения этих волн в точке $x=l$. Аналогичный смысл имеют члены второй строки, если

учесть, что они описывают волны, возникшие на участке между x и l. Мы увидим, что это решение сохраняет свой вид до момента $2l/c$; с этого момента все члены исчезнут, так как их аргументы выйдут из допустимого диапазона, но сразу же появятся члены с $n=1$ из (13) и повторят все движение. В момент времени $4l/c$ они также исчезнут, но появятся члены с $n=2$ и т. д. до бесконечности.

В рассмотренных случаях движение точно повторяется через регулярные интервалы времени. В случаях, которые будут рассмотрены ниже, это не выполняется.

19.04. *Однородная тяжелая струна длиной $2l$ закреплена на концах. Частица массы m прикреплена к середине струны. Первоначально струна прямая и находится под натяжением P. Частице дан поперечный импульс J. Найти последующее движение частицы* [1, стр. 204].

Будем считать $x=0$ в середине струны. Благодаря симметрии мы должны рассмотреть только диапазон $0 \leqslant x \leqslant l$. Обозначим смещение частицы через η. Когда $t=0$, y и $\partial y/\partial t$ будут равны нулю всюду, исключая $x=0$. Вспомогательное уравнение для струны не требует, следовательно, дополнительных членов, связанных с начальными условиями. Условия $y=\eta$ при $x=0$ и $y=0$ при $x=l$ дают

$$y=\eta\frac{\operatorname{sh} p\,(l-x)/c}{\operatorname{sh} pl/c}. \tag{1}$$

Уравнение движения частицы с учетом равного натяжения в струне по обе стороны от нее имеет вид

$$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=2P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{2}$$

При $t=0$, $\eta=0$ $m\dot{\eta}=J$. Следовательно, вспомогательное уравнение для η будет

$$mp^2\eta=2P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}+pJ=-2P\eta\frac{p}{c}\operatorname{cth} pl/c+pJ, \tag{3}$$

и

$$\eta=\frac{Jc}{mpc+2P\operatorname{cth} pl/c}. \tag{4}$$

Если ρ — линейная плотность струны, то $P=\rho c^2$ и масса струны равна $2\rho l$. Обозначим

$$\frac{2\rho l}{m}=k,\quad 2P=\frac{kmc^2}{l}. \tag{5}$$

Тогда

$$\eta=\frac{lJ/mc}{(pl/c)+k\operatorname{cth} pl/c}. \tag{6}$$

Пользуясь при интерпретации правилом элементарных дробей, мы учитываем, что система стабильна и не диссипативна, и, следовательно, все нули знаменателя чисто мнимые. Если $pl/c = i\omega$, то ω удовлетворяет уравнению

$$\omega = k \operatorname{ctg} \omega. \tag{7}$$

Между двумя последовательными положительными или отрицательными величинами, кратными π, всегда лежит корень, причем имеются пары корней с одинаковым модулем. Тогда

$$\eta = \frac{lJ}{mc} \sum \frac{l}{i\omega c\,(1 + k \operatorname{cosec}^2\omega)\,(l/c)}\, e^{i\omega ct/l} = \\ = \frac{2lJ}{mc} \sum \frac{1}{\omega\,(1 + k \operatorname{cosec}^2\omega)} \sin\frac{\omega ct}{l}; \tag{8}$$

второе суммирование производится только по положительным ω.

Если корень (7) равен $n\pi + \lambda$, где $\lambda < \pi$, то

$$(n\pi + \lambda) \operatorname{tg} \lambda = k \tag{9}$$

и $\lambda = k/n\pi$. Тогда ряд сходится как $\sum n^{-3}$. Четырех или пяти членов достаточно для получения точности выше 1%. Для более высокой точности необходима бóльшая работа.

Если t не слишком велико, точное решение легко найти разложением на волны. Удобно считать единицей времени l/c время, необходимое для пробега волны вдоль половины струны. Обозначим также $J/m = V$. Тогда

$$\eta = \frac{V}{p + k \operatorname{cth} p} = \frac{V(1 - e^{-2p})}{(p + k) - (p - k)\, e^{-2p}} = \\ = V \frac{1 - e^{-2p}}{p + k}\left[1 + \frac{p - k}{p + k} e^{-2p} + \left(\frac{p - k}{p + k}\right)^2 e^{-4p} + \ldots\right] = \\ = \frac{V}{p + k}\left[1 - \frac{2k}{p + k} e^{-2p} - \frac{2k(p - k)}{(p + k)^2} e^{-4p} - \ldots\right]. \tag{10}$$

Первый член равен нулю при $t < 0$; при $t > 0$ он равен

$$\frac{V}{k}(1 - e^{-kt}) \quad (t > 0). \tag{11}$$

После $t = 2$ второй член уже не равен нулю. Мы имеем

$$\frac{k}{(p + k)^2} = \frac{1}{k} - \frac{p}{k(p + k)} - \frac{p}{(p + k)^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kt} - te^{-kt}, \tag{12}$$

и вклад второго члена будет

$$-\frac{2V}{k}\left[1 - e^{-k(t-2)} - k(t - 2)\, e^{-k(t-2)}\right] \quad (t > 2). \tag{13}$$

Третий член равен 0 при $t<4$; для $t>4$, как легко видеть, он дает

$$\frac{2V}{k}\{1-[1+k(t-4)+k^2(t-4)^2]e^{-k(t-4)}\}. \tag{14}$$

Процесс может быть продолжен так, чтобы определить движение в любой интересующий нас момент времени. Появление нового члена соответствует вступлению новой пары волн, отраженных на концах.

19.05. *Однородный тяжелый стержень подвешен вертикально за один конец, к нижнему концу внезапно прикреплена масса m. Найти, как изменяется во времени натяжение на верхнем конце* [2].

В случае легкого стержня очевидно, что дополнительная масса будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия; когда она достигнет своей нижней позиции, приращение напряжения будет равно удвоенному весу. Это объясняет опасность внезапного приложения нагрузки, которую система вполне может выдержать, если бы нагрузка увеличивалась постепенно.

В случае тяжелого стержня, если обозначить расстояние от верхнего конца через x, а продольное смещение через y, смещение y удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=F, \tag{1}$$

где ρ — плотность, E — модуль Юнга, F — внешняя сила на единицу объема, в рассматриваемом случае равная ρg. Пусть $E/\rho=c^2$ и смещение частицы под натяжением до момента прикрепления груза будет y_0. Тогда

$$-c^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}=g. \tag{2}$$

При $x=0$, $y_0=0$; при $x=l$ (длина стержня) $\partial y_0/\partial x=0$. Отсюда

$$y_0=\frac{glx}{c^2}\left(1-\frac{x}{2l}\right). \tag{3}$$

После прикрепления груза еще справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=g=-c^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}, \tag{4}$$

и когда $t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=0$. Отсюда вспомогательное уравнение будет иметь вид

$$p^2y-c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=p^2y_0-c^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}, \tag{5}$$

и решение, исчезающее при $x = 0$, будет

$$y - y_0 = \frac{A \operatorname{sh} px}{c}, \tag{6}$$

где A не зависит от x.

Если ω — площадь поперечного сечения стержня, то уравнение движения массы m имеет вид

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = mg - E\omega \frac{\partial y}{\partial x}, \tag{7}$$

где производные вычисляются в точке $x = l$. Вспомогательное уравнение будет

$$mp^2 y = mg + mp^2 y_0 - E\omega \frac{\partial y}{\partial x}; \tag{8}$$

подставляя сюда y из (6), имеем

$$\left(p^2 \operatorname{sh} \frac{pl}{c} + \frac{E\omega p}{mc} \operatorname{ch} \frac{pl}{c}\right) A = g. \tag{9}$$

Растягивающее напряжение на верхнем конце равно

$$g\rho l + \frac{EpA}{c} = g\rho l + \frac{Emg}{E\omega \operatorname{ch} pl/c + mcp \operatorname{sh} pl/c}. \tag{10}$$

Если k — отношение массы груза к массе стержня без груза

$$k = m/\rho\omega l, \quad mc/E\omega = kl/c, \tag{11}$$

то напряжение равно

$$\frac{gm}{\omega}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{\operatorname{ch} pl/c + k\,(pl/c) \operatorname{sh} pl/c}\right]. \tag{12}$$

Мы видим, что $gm/\omega k$ — напряжение, вызванное весом стержня без груза, и gm/ω — статическое напряжение благодаря дополнительному грузу. Для оценки истинного напряжения мы должны разложить оператор по степеням $e^{-pl/c}$. Примем l/c за новую единицу времени; тогда

$$\frac{1}{kp \operatorname{sh} p + \operatorname{ch} p} = \frac{2e^{-p}}{(kp+1) - (kp-1)\,e^{-2p}} =$$

$$= \frac{2e^{-p}}{kp+1}\left[1 + \frac{kp-1}{kp+1} e^{-2p} + \left(\frac{kp-1}{kp+1}\right)^2 e^{-4p} + \ldots\right]. \tag{13}$$

Первый член равен нулю до $t = 1$, а при больших t равен

$$2\,(1 - e^{-(t-1)/k}). \tag{14}$$

Он монотонно растет, пока t не становится равным 3, когда появляется новое слагаемое. Опять

$$\frac{kp-1}{(kp+1)^2} = -1 + \frac{kp}{kp+1} + \frac{2kp}{(kp+1)^2} = -1 + e^{-t/k} + 2\left(\frac{t}{k}\right)e^{-t/k}, \qquad (15)$$

и первые два члена (13) для $t>3$ равны

$$2e^{-(t-3)/k}\left[1 + \frac{2}{k}(t-3) - e^{-2/k}\right]. \qquad (16)$$

Максимум достигается при

$$1 + e^{-2/k} = \frac{2}{k}(t-3). \qquad (17)$$

Уравнение (17) имеет корень при $t<5$, если

$$\frac{4}{k} > 1 + e^{-2/k}. \qquad (18)$$

Это неравенство обращается в равенство, если $k=2{,}7$. Таким образом, если $k=1$ или 2, максимальное напряжение возникает до того, как $t=5$. Если $k=1$, максимум наступает при $t=3{,}568$ и равен 3,266 gm/ω, т. е. в 1,653 раза больше статического напряжения. Если $k=2$, то соответствующее значение $t=4{,}368$, и напряжение составит 2,520 gm/ω, т. е. в 1,680 раза больше статического.

Третий член вступает в действие при $t=5$, и при бо́льших t он будет равен

$$2\left[1 - e^{-(t-5)/k} - 2\left(\frac{t-5}{k}\right)^2 e^{-(t-5)/k}\right]. \qquad (19)$$

Если $k=4$, то максимум напряжения будет в момент $t=6{,}183$ и составит $2{,}29gm/\omega$. Статическое напряжение равно $1{,}25gm/\omega$, так что их отношение равно 1,83.

Решения этого раздела и **19.04** получены Бромвичем.

19.06. Периодическое возмущение во внутренней точке. Иногда рассуждают так: если внутренней точке системы конечных размеров сообщается периодическое движение, то это обеспечивает непрерывное поступление энергии и приводит в конце концов к неограниченному возрастанию возмущения независимо от того, имеется резонанс или нет (см. [3]). Интересно рассмотреть, что действительно произойдет в простом случае при выполнении всех этих условий. Рассмотрим сначала струну длиной $2l$, первоначально покоящуюся, и поло-

жим, что при $t>0$ средняя точка вынуждена гармонически колебаться со смещением, равным $\sin nt$. Операторное решение, дающее такое смещение при $x=0$ и нулевое смещение при $x=l$, будет

$$y=\frac{np}{p^2+n^2}\,\frac{\operatorname{sh} p(l-x)/c}{\operatorname{sh} pl/c}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-px/c}\left(1-e^{-2p(l-x)/c}\right)\left(1+e^{-2pl/c}+e^{-4pl/c}+\ldots\right)\sin ntH(t)= \\ &= \sin n\left(t-\frac{x}{c}\right)-\sin n\left(t-\frac{2l-x}{c}\right)+ \\ &+\sin n\left(t-\frac{2l+x}{c}\right)-\sin n\left(t-\frac{4l-x}{c}\right)+\ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

куда мы включили только члены с положительными аргументами. В любой момент движение состоит из множества наложенных друг на друга гармонических волн одинакового периода, число которых непрерывно увеличивается со временем. На первый взгляд это означает, что возмущение неограниченно растет; с другой стороны, возможно, этого не происходит из-за интерференции следующих друг за другом волн. Оценить это можно, применив к (1) операционное правило элементарных дробей. Полюса в точках in дают

$$\frac{in^2}{in\cdot 2in}\,\frac{\sin n(l-x)/c}{\sin nl/c}\,e^{int}=-\frac{1}{2}\,i\,\frac{\sin n(l-x)/c}{\sin nl/c}\,e^{int} \tag{3}$$

и в точках $-in$ дают

$$\frac{\sin n(l-x)/c}{\sin nl/c}\sin nt. \tag{4}$$

Полюс в $pl/c=ri\pi$ (r целое) дает

$$\begin{aligned} &\frac{nri\pi c/l}{n^2-r^2\pi^2c^2/l^2}\,\frac{i\sin r\pi(l-x)/l}{ri\pi\cos r\pi}\,e^{ri\pi ct/l}= \\ &\qquad=i\,\frac{nc/l}{n^2-r^2\pi^2c^2/l^2}(-1)^r\sin\frac{r\pi(l-x)}{l}\,e^{ri\pi ct/l}, \end{aligned} \tag{5}$$

и в целом

$$\begin{aligned} y=&\frac{\sin n(l-x)/c}{\sin nl/c}\sin nt- \\ &-2\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\,\frac{nc/l}{n^2-r^2\pi^2c^2/l^2}\sin\frac{r\pi(l-x)}{l}\sin\frac{r\pi ct}{l}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ряд абсолютно сходится до тех пор, пока n не точно кратно $\pi c/l$, и эта сумма для любых x и t меньше, чем результат замены синусов на 1 и всех членов их модулями. Следовательно, y не увеличивается беспредельно. Если мы оценим кинетическую или потенциальную энергию, то окажется, что ряд

сходится как $\sum r^{-2}$, а энергия никогда не превысит некоторого предела.

Скорость поступления энергии пропорциональна произведению $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, вычисляемому при $x=0$; один множитель состоит из синусов, другой — из косинусов с аргументами, кратными времени. Скорость поступления энергии в одни моменты времени положительна, в другие — отрицательна и в среднем для большого интервала времени стремится к нулю.

В рассмотренной задаче мы требовали ограниченных изменений смещений в одной точке; можно подумать, что это условие не допускает неограниченного роста смещения в любой точке. Рассмотрим поэтому также случай, когда периодической функцией вида $\sin nt$ для $t>0$ является не смещение, а поперечная сила.

Обозначая через y_0 смещение в $x=0$, мы получим

$$y = y_0 \frac{\operatorname{sh} p(l-x)/c}{\operatorname{sh} pl/c}, \tag{7}$$

$$\sin nt = \frac{np}{p^2+n^2} = -2P\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = y_0 \frac{p}{c} 2P \operatorname{cth} pl/c \tag{8}$$

и

$$y = \frac{nc}{2P(p^2+n^2)} \frac{\operatorname{sh} p(l-x)/c}{\operatorname{ch} pl/c} = \tag{9}$$

$$= \frac{c}{2Pn} e^{-px/c}(1-e^{-2p(l-x)/c})(1-e^{-2pl/c}+e^{-4pl/c}-\ldots)(1-\cos nt) =$$

$$= \frac{c}{2Pn}\left\{\left[1-\cos n\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]-\left[1-\cos n\left(t-\frac{2l-x}{c}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[1-\cos n\left(t-\frac{2l+x}{c}\right)\right]+\ldots\right\}, \tag{10}$$

где опять должны быть учтены только члены с положительными аргументами. Если мы вычислим (9) с помощью правила элементарных дробей, то получим

$$y = \frac{c}{2Pn}\sin nt \frac{\sin n(l-x)/c}{\cos nl/c} +$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty} \frac{nc}{P\left[n^2-\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2c^2/l^2\right]\left(r+\frac{1}{2}\right)\pi} \cos\left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi ct}{l}. \tag{11}$$

В этом случае ряд также сходится как $\sum r^{-3}$, и опять существует верхняя грань для смещения. Сила в точке $x=0$ теперь равна $\sin nt$, а скорость представляется рядом из косинусов, так что спустя продолжительное время в систему поступает такое же количество энергии, какое отбирается.

Мы предполагали, что система имеет конечные размеры. Если предположить, что $l \to \infty$, то получим бесконечно длинную струну, что вряд ли имеет практический смысл; однако тот же анализ вполне применим к газу в длинной трубе, открытой на обоих концах. Принимая, что l растет, мы видим, что волны, связанные с членами, аргументы которых содержат l, возвращаются все позже и позже, и решение для любого данного x сводится к первому члену до тех пор, пока $2l - x < ct$, т. е. чем больше l, тем больше интервал времени. Переходя к пределу, мы видим, что возмущение состоит из волны фиксированной амплитуды, захватывающей все большие расстояния от начала координат; следовательно, энергия неограниченно растет. Таким образом, конечная сила при условии, что она действует достаточно долго, может передать неограниченной системе безгранично большое количество энергии. Следует заметить, что в этом случае операторное решение сводится к первому члену в разложении на волны и может быть найдено из вспомогательного уравнения, записанного в виде

$$p^2 y - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Мы берем решение в виде $Ae^{-px/c}$, пренебрегая решением $Be^{px/c}$, описывающим волну, идущую из бесконечности.

* Мы полагали в (6), что n не точно кратно $\pi c/l$, и в (11), что n не равно $\left(s + \frac{1}{2}\right)\pi c/l$, где s — целое число. В специальных случаях, когда это ограничение не выполняется, мы имеем резонанс, и возмущение будет расти. Модификация решения, позволяющая учесть кратные полюса, весьма проста, но мало интересна, так как неограниченное возрастание возмущения в случае резонанса формально возможно даже для системы с одной степенью свободы. Главный вывод заключается в том, что гармоническая сила, как бы долго она ни действовала, никогда не передает системе больше определенного количества энергии, за исключением случаев, когда система не ограничена или период силы точно равен собственному периоду системы. В последнем случае необходимо изменить решение, учтя отброшенные высшие степени смещения.

19.07. Задачи со сферической симметрией. Уравнение распространения звука в трехмерном пространстве имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi, \tag{1}$$

где φ — потенциал скорости, а компоненты скорости равны

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{2}$$

и давление

$$P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{3}$$

(Мы используем P, так как хотим сохранить p как оператор Хевисайда.) Теперь если φ — функция только r и t, где r — расстояние от заданной точки, то

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi). \tag{4}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} (r\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi), \tag{5}$$

и форма уравнения такая же, как для уравнения колебаний струны и распространения звука в одном измерении, где зависимая переменная теперь равна $r\varphi$. Отсюда общее решение имеет вид

$$r\varphi = f(r - ct) + g(r + ct). \tag{6}$$

Первый член представляет собой расходящуюся волну, а второй — сходящуюся волну.

19.08. Взрывная волна. Рассмотрим сферическую область высокого давления, окруженную бесконечной областью однородного давления. Границей между ними служит твердая стенка, и система покоится. Пусть граница мгновенно исчезает; найти последующее движение. Предположим, что массовые скорости достаточно малы, чтобы можно было пренебречь квадратами смещений. Во всех точках при $t > 0$ выполняется **19.07** (1). Обозначим через P избыточное давление по сравнению с невозмущенным давлением вне сферы. Поскольку вначале было состояние покоя, φ постоянно всюду и может быть принято равным нулю. Избыточное давление тогда составит

$$P = -\frac{\rho \partial \varphi}{\partial t}. \tag{1}$$

В начальный момент оно равно положительной константе P_0 при $r < a$ и нулю при $r > a$. Мы можем придать вспомогательному уравнению вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{p^2}{c^2}\right)(r\varphi) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{\rho c^2} pr & (r < a), \\ 0 & (r > a). \end{cases} \tag{2}$$

Давление должно оставаться ограниченным в центре, и возмущение при $r>a$ не должно содержать сходящихся волн. Тогда

$$r\varphi=\begin{cases} -\frac{P_0 r}{\rho p}+A\,\mathrm{sh}\,\frac{pr}{c} & (r<a),\\ Be^{-pr/c} & (r>a). \end{cases} \tag{3}$$

Давление и радиальная компонента скорости должны быть непрерывны при $r=a$. Отсюда φ и $\partial\varphi/\partial r$ также непрерывны. Это дает

$$-\frac{P_0 a}{\rho p}+A\,\mathrm{sh}\,\frac{pa}{c}=Be^{-pa/c}, \tag{4}$$

$$-\frac{P_0}{\rho p}+\frac{p}{c}A\,\mathrm{ch}\,\frac{pa}{c}=-\frac{p}{c}Be^{-pa/c}, \tag{5}$$

откуда

$$A=\frac{P_0}{\rho p^2}(c+ap)\,e^{-pa/c}, \tag{6}$$

$$B=\frac{P_0}{2\rho p^2}(c-ap)\,e^{pa/c}-\frac{P_0}{2\rho p^2}(c+ap)\,e^{-pa/c}.$$

Таким образом, вне начальной сферы

$$\frac{\rho}{P_0}r\varphi=\left[\frac{1}{2p^2}(c-ap)\,e^{-p(r-a)/c}-\frac{1}{2p^2}(c+ap)\,e^{-p(r+a)/c}\right]H(t). \tag{7}$$

Соответствующее изменение давления имеет вид

$$\begin{aligned} P&=-\frac{P_0}{2r}\left[\left(\frac{c}{p}-a\right)e^{-p(r-a)/c}-\left(\frac{c}{p}+a\right)e^{-p(r+a)/c}\right]H(t)=\\ &=-\frac{P_0}{2r}\left[e^{-p(r-a)/c}(ct-a)-e^{-p(r+a)/c}(ct+a)\right]H(t)=\\ &=-\frac{P_0}{2r}\left\{\left[c\left(t-\frac{r-a}{c}\right)-a\right]H\left(t-\frac{r-a}{c}\right)-\right.\\ &\left.-\left[c\left(t-\frac{r+a}{c}\right)+a\right]H\left(t-\frac{r+a}{c}\right)\right\}=\\ &=-\frac{P_0}{2r}\left[(ct-r)H\left(t-\frac{r-a}{c}\right)-(ct-r)H\left(t-\frac{r+a}{c}\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Для данного $r>a$ давление равно 0 до момента времени $(r-a)/c$, когда прибывает первая волна из сжатой области, и после момента $(r+a)/c$, когда проходит волна от наиболее удаленной точки. В промежуточные моменты времени оно равно $P_0(r-ct)/2r$, т. е. $P_0a/2r$ в момент вступления первой волны, $-P_0a/2r$ в момент прохождения последней, и линейно изменяется в промежутке. Сжатию на переднем фронте волны соответствует равное разрежение на заднем фронте [4].

Внутри сферы давление равно

$$\frac{P_0 p}{r}\left[\frac{r}{p}-\frac{1}{p^2}(c+ap)\,\mathrm{sh}\,\frac{pr}{c}\,e^{-pa/c}\right]=$$

$$=P_0\left[1-\frac{1}{2r}\left(\frac{c}{p}+a\right)\left(e^{-p(a-r)/c}-e^{-p(a+r)/c}\right]\right. . \qquad (9)$$

Оно равно P_0 до момента $(a-r)/c$, после чего мгновенно спадает до $P_0(1-a/2r)$, линейно уменьшается во времени до тех пор, пока не достигнет $-P_0a/2r$ в момент $(a+r)/c$, и затем мгновенно возрастает до 0.

Бесконечное давление в центре существует только мгновенно, так как время существования такого возмущения в данной точке равно $2r/c$ и стремится к 0 в центре. Оно вызвано одновременным вступлением элементарных волн со всех точек поверхности; в других точках волны от различных участков приходят в разное время, что приводит к конечному возмущению давления в конечном интервале времени. Если $r<\frac{1}{2}a$, давление становится отрицательным, как только приходит возмущение. Строго говоря, появление бесконечности в решении означает, что нельзя пренебрегать квадратами возмущений внутри определенного диапазона r и t; однако этот диапазон тем меньше, чем меньше P_0.

Поведение скорости в удаленных точках сходно с поведением давления. Если u — радиальная составляющая скорости, то

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{p\varphi}{c}-\frac{\varphi}{r}.$$

Если r велико, первый член равен просто $\rho P/c$, и его поведение очевидно. Он пропорционален $1/r$, второй член пропорционален $1/r^2$. Первый член не дает интегрального смещения по направлению от центра, так как движение от центра на этапе роста давления сразу не компенсируется обратными смещениями на этапе спада давления. Однако второй член описывает малые скорости, которые исчезают в начале и конце волны и достигают положительного максимума в момент r/c. Он дает результирующее радиальное смещение порядка a/r от максимальной амплитуды первого члена; это отражает тот факт, что первоначально сжатое вещество расширяется до тех пор, пока не достигнет нормального давления, и окружающее вещество отодвигается, чтобы освободить ему место.

Соответствующая одномерная задача заключалась бы в следующем: внутри отрезка длиной $2a$ в бесконечной трубе существует избыточное давление P_0, внезапно освобождаемое. Две волны избыточного давления $\frac{1}{2}P_0$ будут распространяться

в противоположных направлениях. Уменьшение давления на заднем фронте волны для трехмерного случая не имеет аналогии в одномерной среде. Когда мы будем иметь дело с применением функций Бесселя, то увидим, что в двумерном случае имеется поразительная аналогия.

Возмущения, которые не влияют на данную точку до определенного момента времени, принято называть *импульсами*. Примером таких возмущений является звуковая волна от взрыва, а также вспышки света от вращающегося зеркала и упругие волны, возбуждаемые землетрясением.

19.09. Расходящиеся волны, возбуждаемые радиально осциллирующим шаром [5, 6]. Положим, что шар радиуса a в момент времени 0 начинает радиально осциллировать с периодом $2\pi/n$. Необходимо найти движение воздуха вне шара.

Вначале все находится в покое; следовательно,

$$r\varphi = Ae^{-pr/c}. \tag{1}$$

При $r=a$ для $t>0$ смещение, направленное от шара, положим равным $(1/n)\sin nt$; скорость смещения будет равна $\cos nt$. Отсюда

$$A\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}e^{-pr/c}\right)\right]_{r=a} = \frac{p^2}{p^2+n^2}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} r\varphi &= \frac{p^2a^2}{(p^2+n^2)(1+pa/c)}\exp\left[-\frac{p}{c}(r-a)\right] = \\ &= -\frac{c^2a^2}{c^2+a^2n^2}\exp\left[-\frac{p}{c}(r-a)\right]\left[\cos nt+\frac{na}{c}\sin nt-\exp\left(-\frac{ct}{a}\right)\right] = \\ &= -\frac{c^2a^2}{c^2+a^2n^2}\left[\cos n\left(t-\frac{r-a}{c}\right)+\right. \\ &\quad \left.+\frac{na}{c}\sin n\left(t-\frac{r-a}{c}\right)-\exp\left(-\frac{ct-r+a}{a}\right)\right], \end{aligned} \tag{3}$$

когда $ct>r-a$.

Решение имеет периодическую часть с периодом, равным периоду возмущения, а также член, затухающий со временем со скоростью, не зависящей от частоты и определяемой радиусом шара.

Поскольку в задаче со взрывом нет затухающей со временем части, то мы можем считать, что она обусловлена ограничениями, наложенными на движение шара. Отношение связанных с ней скорости или давления к скорости или давлению, обусловленным вторым членом в (3), близко к $(c/na)^2$.

ПРИМЕРЫ

1. Струна длиной $3l$ с линейной плотностью ρ находится под натяжением $P = \rho c^2$ и закреплена на концах. Две частицы массы m прикреплены в точках, делящих струну на три части. Одной из частиц сообщен поперечный импульс J. Показать, что операторное решение для смещения другой частицы имеет вид

$$\frac{PJ}{c} \frac{\operatorname{sh} pl/c}{(mp \operatorname{sh} pl/c + 2P/c \operatorname{ch} pl/c)^2 - P^2/c^2},$$

и найти явное решение до момента времени $3l/c$.

2. Тяжелая однородная струна длиной $3l$ с линейной плотностью ρ закреплена на концах, и частица массы m прикреплена на расстоянии l от одного из концов. Натяжение равно ρc^2. Частице придана поперечная скорость v. Показать, что смещение частицы равно

$$\eta = \frac{mv \operatorname{sh} pl/c \operatorname{sh} 2pl/c}{mp \operatorname{sh} pl/c \operatorname{sh} 2pl/c + \rho c \operatorname{sh} 3pl/c},$$

и вычислить η до момента времени $4l/c$. (M. T., Sched. B, 1927.)

3. Закрытая труба длиной l содержит воздух, плотность которого больше плотности воздуха вне трубы в отношении $(1 + s_0) : 1$. Все находилось в покое до тех пор, пока диск, закрывающий один из концов трубы, не был мгновенно устранен. Показать, что спустя время t потенциал скорости равен

$$\varphi = -\frac{8lcs_0}{\pi^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^2} \cos \frac{(2r+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2r+1)\pi ct}{2l}$$

(начало координат взято на постоянно закрытом конце трубы; c — скорость звука). (M/c, Part III, 1932.)

4. Найти движение, возникающее в задаче, аналогичной 3, но с трубой, имеющей форму узкого конуса, а не цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh*, Theory of Sound, v. 1, 1894, p. 204. (Русский перевод: *Релей Д. В.* (*Стретт*), Теория звука, т. 1, М. ГИТТЛ, 1955.)
2. *Love A. E. H.*, Elasticity, 1905, § 283. (Русский перевод: *Ляв А. Е. Г.*, Математическая теория упругости, М. — Л., ОНТИ, 1935.)
3. *Macdonald H. M.*, Proc. Roy. Soc., **A98**, 409—411 (1921).
4. *Stokes G. G.*, Phil. Mag., **34**, 52 (1849).
5. *Love A. E. H.*, Proc. Lond. Math. Soc., (2)**2**, 88 (1904).
6. *Bromwich T. J.* I'A., Proc. Lond. Math. Soc., (2)**15**, 431 (1916).

Глава 20

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ОДНОМ И ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Жара и хлад, и сушь и влага
Чредой идут к своим местам.

Джон Драйден, „Песнь в день святой Цецилии"

20.01. Уравнение теплопроводности. Скорость передачи тепла через единицу поверхности путем теплопроводности равна $-k\,\partial V/\partial n$, где V — температура, k — постоянная материала, называемая коэффициентом теплопроводности, и dn — элемент нормали к поверхности. Отсюда легко вывести, что в одчородном материале скорость поступления тепла в элемент объема $dx\,dy\,dz$ равна $k\nabla^2 V\,dx\,dy\,dz$. Но чтобы повысить температуру единицы массы на dV, требуется количество тепла $c\,dV$, где c — удельная теплоемкость; и, следовательно, тепло, необходимое для повышения на dV температуры единицы объема, будет равно $\rho c\,dV$, где ρ — плотность *). Таким образом, V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c V) = k\nabla^2 V. \tag{1}$$

Введем коэффициент температуропроводности h^2, определяемый соотношением

$$\frac{k}{\rho c} = h^2. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = h^2\nabla^2 V. \tag{3}$$

Кроме того, существуют внутренние источники тепла. Если тепло, производимое такими источниками, оставаясь там, где оно возникло, повышало бы температуру на P в единицу времени, то к правой части уравнения (3) нужно добавить член, равный P. Основными источниками тепла во внутренних точках среды являются химические и радиоактивные превращения.

*) Термодинамические соображения требуют некоторого изменения этого утверждения, так как, вообще говоря, происходит тепловое расширение и часть тепла расходуется на совершение работы против давления окружающего материала. Соответствующая поправка значительна для газов, но несущественна для твердых тел и жидкостей. Ср. [1] или [2].

При применении операционных методов для решения уравнения теплопроводности обычно удобнее писать h^2q^2 вместо p. Тогда изображение решения будет функцией q. Однако перед интерпретацией нужно снова перейти от q к p.

20.02. Стержень, охлаждаемый с одного конца. Рассмотрим прежде всего однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью, находящийся в начальный момент времени при температуре S. В момент $t=0$ конец стержня $x=0$ охлаждается до нулевой температуры и поддерживается при этой температуре в дальнейшем. Конец $x=l$ поддерживается при температуре S. Найти распределение температуры в остальных точках стержня.

Поскольку эта задача одномерная, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

а начальное условие при $t=0$ будет $V=S$. Отсюда вспомогательное уравнение получается в виде

$$pV - h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = pS \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q^2 V = -q^2 S. \tag{3}$$

Краевые условия состоят в том, чтобы $V=0$ при $x=0$, $t>0$ и $V=S$ при $x=l$. Отсюда

$$V = S\left[1 - \frac{\operatorname{sh} q(l-x)}{\operatorname{sh} ql}\right]. \tag{4}$$

Этот оператор является четной функцией q и, следовательно, однозначной функцией p. Полюсы расположены при $ql = \pm in\pi$, т. е. $p = -h^2n^2\pi^2/l^2$, где n — любое целое число. Но отрицательные значения $\operatorname{Im} q$ соответствуют тем же значениям p, что и положительные, поэтому при применении операционного правила элементарных дробей нужно учитывать только положительные значения и нуль. Слагаемое, соответствующее полюсу $p=0$, равно

$$S\left(1 - \frac{l-x}{l}\right) = \frac{Sx}{l}. \tag{5}$$

Общий член имеет вид

$$-S\,\frac{\operatorname{sh} in\pi(l-x)/l}{(-h^2n^2\pi^2/l^2)(\operatorname{ch} in\pi)(l^2/2h^2in\pi)}\,e^{-n^2\pi^2h^2t/l^2} = S\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\,e^{-n^2\pi^2h^2t/l^2}, \tag{6}$$

а полное решение получается в виде

$$V = S\left[\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-n^2\pi^2h^2t/l^2}\right]. \tag{7}$$

Если использовать интеграл Бромвича, то получим

$$V = \frac{S}{2\pi i} \int_L e^{zt}\left(1 - \frac{\operatorname{sh}\zeta(l-x)}{\operatorname{sh}\zeta l}\right)\frac{dz}{z}, \tag{8}$$

где $h^2\zeta^2 = z$. Подынтегральное выражение является однозначной функцией z с полюсами в точках $z = 0$ и $z = -n^2h^2\pi^2/l^2$. Неважно, выберем ли мы ζ действительным и положительным или

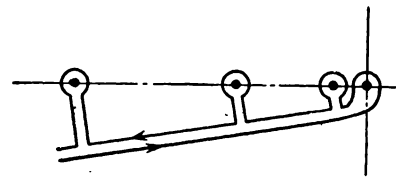

Рис. 64.

действительным и отрицательным при положительном действительном z. Мы выберем его положительным. Путь интегрирования можно деформировать, как показано на рис. 64, а затем превратить его в петлю вокруг точки $z = 0$ и вокруг всех отрицательных полюсов. Вычет в нуле равен x/l. В отрицательных полюсах $\zeta = +in\pi/l$, и

$$z\frac{d}{dz}\operatorname{sh}\zeta l = \frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\zeta}\operatorname{sh}\zeta l = \frac{1}{2}\zeta l\operatorname{ch}\zeta l = \frac{1}{2}in\pi(-1)^n.$$

Следовательно, вычеты равны

$$-e^{-n^2h^2\pi^2t/l^2}\frac{\operatorname{sh} in\pi(l-x)/l}{\frac{1}{2}in\pi(-1)^n} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-n^2\pi^2h^2t/l^2}.$$

Значения $\zeta = -in\pi/l$ не появляются, так как в отрицательных полюсах $\arg\zeta = \frac{1}{2}\arg z = \frac{1}{2}\pi i$ при указанном выборе контура интегрирования. Отсюда мы вновь получаем (7). Путь интегрирования можно было бы деформировать любым из двух способов, показанных на рис. 65. Легко видеть, что каждый из них привел бы к тому же результату.

При умеренных значениях $\pi ht^{1/2}/l$ ряд (7) быстро сходится. Если эта величина равна 1, то экспонента во втором члене

равна $e^{-4}=0{,}018$, а в следующем $e^{-9}=0{,}0001$. Очевидно, что на этом этапе происходит заметное охлаждение половины длины стержня.

При малых $\pi ht^{1/2}/l$ ряд сходится медленно. В этом случае мы можем воспользоваться разновидностью метода разложения, применявшейся при изучении волн [3]. Запишем (4) в виде

$$V = S\,[1 - e^{-qx}(1 - e^{-2q\,(l-x)})(1 + e^{-2ql} + e^{-4ql} + \ldots)]. \qquad (9)$$

Если интерпретировать это выражение как интеграл по пути L, то аргумент ζ во всех точках пути интегрирования

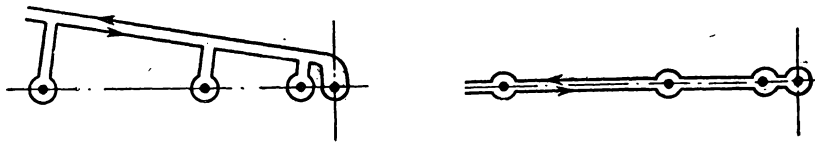

Рис. 65.

лежит между $\pm\frac{1}{4}\pi$, и этот ряд сходится равномерно и абсолютно. Поэтому почленное интегрирование допустимо, и можно интерпретировать каждый член в отдельности. Имеем

$$qx = \frac{xp^{1/2}}{h}, \qquad (10)$$

и по **12.126** (19)

$$e^{-qx}H(t) = 1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}} \qquad (t>0). \qquad (11)$$

Отсюда

$$V = S\left[\operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}} + \left(1 - \operatorname{erf}\frac{2l-x}{2ht^{1/2}}\right) - \left(1 - \operatorname{erf}\frac{2l+x}{2ht^{1/2}}\right) + \ldots\right]. \qquad (12)$$

При больших w функция $1-\operatorname{erf} w$ мала по сравнению с e^{-w^2}. Поэтому для умеренных значений $x/2ht^{1/2}$, но больших $l/2ht^{1/2}$ этот ряд быстро сходится и в большинстве случаев в нем можно ограничиться первым членом. Следовательно, это решение пригодно в тех случаях, когда ряд (7) неудобен для вычислений.

Отдельные члены ряда (9) оказались зависящими от того, какой знак мы выберем для ζ при действительном положительном z, тогда как исходный интеграл от этого не зависел. Но если бы мы взяли отрицательный знак, ряд расходился бы на L. Однако можно было бы получить сходящееся на L разложение с положительными знаками у показателей экспонент. Но так как теперь $\operatorname{Re}\zeta$ на L отрицательно, мы пришли бы в точности к тому же самому ряду. Выбор положительного знака удобен,

но и отрицательный знак при правильном обращении привел бы к тому же ответу.

При больших t градиент температуры при $x=0$ равен

$$S\left[\frac{\partial}{\partial x}(1-e^{-qx})\right]_{x=0} = Sq = \frac{S}{h\sqrt{\pi t}}. \qquad (13)$$

Это выражение сыграло важную роль в оценке возраста Земли Кельвином. Пренебрегая кривизной Земли, он рассматривал задачу об остывании Земли как одномерную задачу теплопроводности, принимая величину S равной точке плавления. Тогда измерения градиента температуры на поверхности позволяют на основании (13) оценить t. Неизвестные во времена Кельвина данные привели в дальнейшем к значительному изменению его результата.

20.03. Одномерная теплопроводность в бесконечной области. Примем сначала, что распределение температуры в момент $t=0$ имеет вид

$$V = H(x). \qquad (1)$$

Мы видели, что функция

$$e^{-qx}H(t) = 1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}} \qquad (t>0) \qquad (2)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial y}{\partial t} - h^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (3)$$

при положительных значениях x. Она будет удовлетворять этому уравнению и при отрицательных x, так как оба члена в (3) являются нечетными функциями x. Кроме того, при $t\to 0$ эта функция стремится к 0 для всех положительных значений x и к 2 при всех отрицательных значениях. Отсюда следует, что функция

$$\frac{1}{2}(2-e^{-qx}) = \frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}}\right] \qquad (4)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) для всех x и для всех положительных значений t, а при $t\to 0$ она стремится к 0 при отрицательных x и к 1 при положительных x, т. е. к $H(x)$. Следовательно, эта функция дает решения для положительных t, если $V=H(x)$ при $t=0$.

Положим теперь, что начальное распределение температуры имеет вид

$$V = f(x) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi)\,dH(\xi - x). \qquad (5)$$

Решение, которое превращается в $H(\xi - x)$ при $t = 0$, есть

$$\frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\frac{\xi - x}{2ht^{1/2}}\right]. \tag{6}$$

Следовательно, по принципу суперпозиции решением общей задачи будет

$$V = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f(\xi)\, d\left[1 + \operatorname{erf}\frac{\xi - x}{2ht^{1/2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-(\xi-x)^2/4h^2t} \frac{d\xi}{2ht^{1/2}}. \tag{7}$$

Положим теперь

$$\xi = x + 2ht^{1/2}\lambda. \tag{8}$$

Тогда

$$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2ht^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2} d\lambda. \tag{9}$$

Это общее решение, полученное Фурье.

20.04. Неидеальное охлаждение одного конца стержня. При том же начальном условии, что и в **20.02**, предположим, что конец $x = l$ поддерживается, как и прежде, при температуре S, но конец $x = 0$ не охлаждается сразу до нулевой температуры. Вместо этого допустим, что он излучает тепло со скоростью, пропорциональной его температуре. В то же время к этому концу подводится тепло путем теплопроводности со скоростью $k\,\partial V/\partial x$ на единицу площади. Эти два процесса должны быть уравновешены, если температура у этого конца меняется непрерывно, так что здесь вместо условия $V = 0$ мы получим соотношение вида

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \alpha V = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{1}$$

Снова получаем операционное решение

$$V = S[1 - A \operatorname{sh} q(l - x)]\, H(t), \tag{2}$$

где постоянная A должна теперь определяться так, чтобы удовлетворялось условие (1). Поэтому

$$qA \operatorname{ch} ql - \alpha(1 - A \operatorname{sh} ql) = 0 \tag{3}$$

и

$$V = S\left\{1 - \frac{\alpha \operatorname{sh} q(l - x)}{q \operatorname{ch} ql + \alpha \operatorname{sh} ql}\right\} H(t). \tag{4}$$

Корни знаменателя соответствуют действительным отрицательным p, и мы можем интерпретировать это выражение, как

обычно, с помощью операционного правила элементарных дробей. Иначе, используя разложение на „волны", имеем

$$V = S\left[1 - \frac{\alpha e^{-qx}}{q+\alpha}\left(1 - e^{-2q(l-x)}\right)\left(1 - \frac{q-\alpha}{q+\alpha}e^{-2ql} + \ldots\right)\right]. \quad (5)$$

Если длина l достаточно велика, чтобы можно было пренебречь членами, содержащими e^{-2ql}, то в этом разложении можно ограничиться первыми двумя членами, так что

$$V = S\left(1 - \frac{\alpha e^{-qx}}{q+\alpha}\right). \quad (6)$$

При больших α это решение сводится к полученному в **20.02**, что можно было ожидать, так как при этом условие (1) означает, что $V = 0$ при $x = 0$, и совпадает с граничным условием, принятым в **20.02**. При малых α получаем $V = S$. В данном случае нет потери тепла на этом конце, и, следовательно, температура не изменяется ни в одной точке. При промежуточных значениях α поступаем следующим образом. Если

$$y = \frac{\alpha e^{-qx}}{q+\alpha} H(t), \quad (7)$$

то интеграл Бромвича дает

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha h}{z^{1/2} + \alpha h} \exp\left(zt - \frac{z^{1/2}x}{h}\right)\frac{dz}{z}. \quad (8)$$

Положим $z = \zeta^2$. Путь интегрирования для ζ представляет собой кривую, проходящую от $Re^{-1/4\pi i}$ до $Re^{1/4\pi i}$, где R велико, и обходящую начало координат с положительной стороны. Обозначим этот путь через N. Тогда

$$y = \frac{1}{\pi i}\int_N \frac{\alpha h}{\zeta(\zeta + \alpha h)} \exp\left(\zeta^2 t - \frac{x\zeta}{h}\right) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_N \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta + \alpha h}\right) \exp\left(\zeta^2 t - \frac{x\zeta}{h}\right) d\zeta. \quad (9)$$

Но

$$\frac{1}{\pi i}\int_N \frac{1}{\zeta} \exp\left(\zeta^2 t - \frac{x\zeta}{h}\right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \exp\left(zt - \frac{z^{1/2}x}{h}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= e^{-qx} H(t) = 1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}} \quad (t > 0). \quad (10)$$

Во втором интеграле в (9) полагаем $\zeta + \alpha h = \mu$ и получаем для этой части y

$$-\frac{1}{\pi i}\int_N \frac{1}{\mu}\exp\left\{\mu^2 t - \mu\left(2\alpha h t + \frac{x}{h}\right)\right\}\exp(\alpha^2 h^2 t + \alpha x)\,d\mu =$$

$$= -\exp(\alpha^2 h^2 t + \alpha x)\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x + 2\alpha h^2 t}{2ht^{1/2}}\right). \quad (11)$$

Отсюда

$$y = 1 - \operatorname{erf}\xi - \exp(\gamma^2 + \alpha x)\{1 - \operatorname{erf}(\xi + \gamma)\}, \quad (12)$$

где $\xi = x/2ht^{1/2}$, $\gamma = \alpha h t^{1/2}$, и

$$V = S[\operatorname{erf}\xi + \exp(\gamma^2 + \alpha x)\{1 - \operatorname{erf}(\xi + \gamma)\}]. \quad (13)$$

Это совпадает с решением, полученным Риманом [4].

Температура при $x = 0$ равна $S\exp\gamma^2(1 - \operatorname{erf}\gamma)$, откуда градиент у этого конца получается с помощью (1). При малых t это выражение разлагается в сходящийся ряд по степеням t и, следовательно, убывает непрерывно. В отличие от **20.02** падение температуры не происходит мгновенно, а градиент не становится сразу же бесконечным. Для больших значений t использовалось асимптотическое разложение для $\operatorname{erf}\gamma$:

$$V_{x=0} \sim \frac{S}{\alpha h\sqrt{\pi t}}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2 h^2 t} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{\alpha^2 h^2 t}\right)^2 - \ldots\right]. \quad (14)$$

Это решение эквивалентно найденному Хевисайдом [3, стр. 15].

20.05. Конец $x = 0$ длинного стержня закреплен, а второй конец $x = l$ свободен. Первоначально стержень находится при нулевой температуре, а в момент $t = 0$ закрепленный конец нагревается до температуры S и затем поддерживается при этой температуре. Каждая часть стержня теряет тепло за счет излучения и конвекции со скоростью, пропорциональной температуре (опыт Ингена – Хауша [5]).

В этом случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 V, \quad (1)$$

где α – постоянная. Положим

$$p + \alpha^2 = h^2 r^2 \quad (2)$$

и запишем уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = r^2 V. \quad (3)$$

Для длинного стержня решение имеет вид

$$V = Se^{-rx} = \frac{S}{2\pi i}\int_L \exp\left\{zt - \frac{(z+\alpha^2)^{1/2}\,x}{h}\right\}\frac{dz}{z}. \qquad (4)$$

Положим $z+\alpha^2 = \zeta^2$. Тогда

$$V = \frac{S}{\pi i}\int_N \exp\left\{(\zeta^2-\alpha^2)\,t - \frac{\zeta x}{h}\right\}\frac{\zeta\,d\zeta}{\zeta^2-\alpha^2} =$$

$$= \frac{S}{2\pi i}\int_N \exp\left\{(\zeta^2-\alpha^2)\,t - \frac{\zeta x}{h}\right\}\left\{\frac{1}{\zeta-\alpha} - \frac{1}{\zeta+\alpha}\right\}d\zeta. \qquad (5)$$

Но подстановка

$$\zeta = \alpha + \mu \qquad (6)$$

приводит член с $1/(\zeta-\alpha)$ к виду

$$\frac{S}{2\pi i}\int_N \exp\left\{\mu^2 t - \mu\left(\frac{x}{h} - 2\alpha t\right)\right\}\exp\left(-\frac{\alpha x}{h}\right)\frac{d\mu}{\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}\,S\exp\left(-\frac{\alpha x}{h}\right)\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x-2\alpha ht}{2ht^{1/2}}\right), \qquad (7)$$

как и в **20.04** (11). Полное решение получается в виде

$$V = \frac{1}{2}\,S\left[\exp\left(-\frac{\alpha x}{h}\right)\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x-2\alpha ht}{2ht^{1/2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{\alpha x}{h}\right)\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x+2\alpha ht}{2ht^{1/2}}\right)\right. . \qquad (8)$$

При малых $\alpha t^{1/2}$, но больших $x/2ht^{1/2}$ функции ошибок практически равны единице и V очень мало. Величина V может быть сравнима с S для малых значений времени только при умеренных значениях $x/2ht^{1/2}$, т. е. при малых $\alpha x/h$. В этом случае решение практически совпадает с $S\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}}\right)$, т. е. с решением в отсутствие потерь через боковую поверхность стержня.

При больших $\alpha t^{1/2}$ и умеренных $x/2ht^{1/2}$ первая функция ошибок близка к -1, а вторая $-$ к $+1$, так что $V \doteqdot Se^{-\alpha x/h}$. Это решение для установившегося состояния. Оно будет справедливо даже для больших значений $x/2ht^{1/2}$, если только величина $\alpha t^{1/2} - x/2ht^{1/2}$ большая и положительная. Следовательно, установившееся состояние приблизительно достигается, если одновременно $t > \alpha^{-2}$ и $t > x/2\alpha h$.

Если имеется несколько стержней с различной температуропроводностью, но одинаковыми поверхностями, так что α для всех стержней одно и то же, то значения x, при которых V

достигает заданного установившегося значения, будут пропорциональны h.

20.06. Охлаждение Земли. За время, протекшее с тех пор как Земля стала твердой, она могла заметно охладиться только на глубинах, малых по сравнению с ее радиусом *). Поэтому можно пренебречь кривизной поверхности Земли и рассматривать эту задачу как одномерную. За счет излучения поверхность Земли должна была быстро охладиться до температуры, поддерживаемой солнечной радиацией, так что мы можем считать температуру поверхности постоянной и принять ее за нуль. Главное отличие от рассмотренной в **20.02** задачи состоит в том, что теперь мы должны принять во внимание влияние разогрева верхних слоев за счет радиоактивности. Положим величину P, введенную в **20.01**, равной постоянной A до глубины H и нулю ниже этой глубины. Примем начальное распределение температуры в виде $S+mx$ $(x>0)$, где m — постоянная. Тогда вспомогательное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q^2 V = -\frac{A}{h^2} - q^2 (S + mx) \tag{1}$$

при $0<x<H$ и

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q^2 V = -q^2 (S + mx) \tag{2}$$

при $H<x$. Решения этих уравнений суть

$$V = \frac{A}{q^2 h^2} + S + mx + Be^{-qx} + Ce^{qx} \tag{3}$$

при $0<x<H$ и

$$V = S + mx + De^{-qx} \tag{4}$$

при $H<x$. Член с e^{qx} не требуется в решении для больших глубин, так как его присутствие привело бы к мгновенному падению температуры на конечную величину вследствие поверхностного возмущения. При $x=0$ температура V должна обращаться в нуль, и, кроме того, V и $\partial V/\partial x$ должны быть непрерывны при $x=H$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} B + C + S + A/p &= 0, \\ Be^{-qH} + Ce^{qH} + A/p &= De^{-qH}, \\ Be^{-qH} - Ce^{qH} &= De^{-qH}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

*) Современные теории приводят к заключению, что первоначально Земля была в твердом состоянии. — *Прим. ред.*

Решая эти уравнения и подставляя в (3) и (4), находим

$$V = S(1-e^{-qx}) + mx + \frac{A}{p}\{1 - e^{-qx} - e^{-qH}\,\mathrm{sh}\,qx\} \quad (0<x<H), \quad (6)$$

$$V = S(1-e^{-qx}) + mx + \frac{A}{p}(\mathrm{ch}\,qH - 1)\,e^{-qx} \quad (H<x). \quad (7)$$

Эти решения и их производные по x содержат операторы вида $q^{-1}e^{-qx}$ и $q^{-2}e^{-qx}$. Они вычисляются при помощи интеграла Бромвича и интегрирования по частям. Мы можем также исходить из соотношения

$$e^{-qx} = 1 - \mathrm{erf}\,\frac{x}{2ht^{1/2}}; \quad (8)$$

если положить

$$\Phi_1(u) = \int_u^\infty (1-\mathrm{erf}\,v)\,dv, \quad \Phi_2(u) = \int_u^\infty \Phi_1(v)\,dv, \quad (9)$$

то

$$q^{-1}e^{-qx} = 2ht^{1/2}\Phi_1\left(\frac{x}{2ht^{1/2}}\right), \quad q^{-2}e^{-qx} = 4h^2t\Phi_2\left(\frac{x}{2ht^{1/2}}\right). \quad (10)$$

Явные выражения Φ_1 и Φ_2 имеют вид

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2} - u(1-\mathrm{erf}\,u), \quad (11)$$

$$\Phi_2(u) = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}u^2\right)(1-\mathrm{erf}\,u) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}ue^{-u^2}. \quad (12)$$

Эти функции были частично протабулированы Джеффрисом и Хартри (см. **23.08**). Однако они тесно связаны с рассматриваемыми ниже функциями Hh_1 и Hh_2, которые протабулированы в Таблицах Британской ассоциации. Было бы полезно иметь таблицы этих последних функций с четырьмя десятичными знаками и шагом, достаточно малым для линейной интерполяции.

В реальной задаче возникает существенное упрощение, связанное с тем, что H мало по сравнению с $2ht^{1/2}$. На этом основании мы можем сохранить только несколько первых членов в разложении решения по степеням H (предварительно деформировав путь интегрирования в интеграле Бромвича в контур M). Тогда градиент температуры у поверхности выразится в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} = Sq + m + \frac{A}{p}(q - qe^{-qH}) \doteqdot Sq + m +$$

$$+\frac{A}{h^2q^2}\,q\left(qH - \frac{1}{2}q^2H^2\right) + \ldots = Sq + m + \frac{AH}{h^2}\left(1 - \frac{1}{2}qH\right) + \ldots$$

$$\ldots = \left(S - \frac{1}{2}\frac{AH^2}{h^2}\right)\frac{1}{h\sqrt{\pi t}} + m + \frac{AH}{h^2} + \ldots, \quad (13)$$

а для температуры на глубинах больше H получится выражение

$$V = S(1 - e^{-qx}) + mx + \frac{A}{h^2q^2}\frac{1}{2}q^2H^2e^{-qx} \doteqdot$$
$$\doteqdot mx + \left(S - \frac{1}{2}\frac{AH^2}{h^2}\right)\operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}} + \frac{AH^2}{2h^2}. \qquad (14)$$

В настоящее время известно, что возраст Земли порядка $2 \cdot 10^9$ лет *). При этом значении t член AH/h^2 составляет примерно $^2/_3$ наблюдаемого градиента температуры.

Можно также предположить, что вместо однородного распределения радиоактивных источников тепла в поверхностном слое их плотность экспоненциально убывает с глубиной. В этом случае вспомогательное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - q^2V = -\frac{A}{h^2}e^{-\alpha x} - q^2(S + mx) \qquad (15)$$

для любых глубин. Часть решения, связанная с $S + mx$, уже известна. Вторая часть получается в виде

$$W = \frac{A}{h^2}\frac{e^{-\alpha x} - e^{-qx}}{q^2 - \alpha^2}. \qquad (16)$$

Но

$$\frac{e^{-\alpha x}}{h^2(q^2 - \alpha^2)} = \frac{e^{-\alpha x}}{p - h^2\alpha^2} = \frac{1}{h^2\alpha^2}e^{-\alpha x}(e^{h^2\alpha^2 t} - 1) \qquad (17)$$

и

$$-\frac{\alpha^2 e^{-qx}}{q^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{q + \alpha} - \frac{\alpha}{q - \alpha}\right)e^{-qx}, \qquad (18)$$

или

$$-\frac{\alpha^2 e^{-qx}}{q^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2}\{e^{-qx} - \exp(\gamma^2 + \alpha x)[1 - \operatorname{erf}(\xi + \gamma)]\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\{e^{-qx} - \exp(\gamma^2 - \alpha x)[1 - \operatorname{erf}(\xi - \gamma)]\}, \qquad (19)$$

где

$$\xi = \frac{x}{2ht^{1/2}}, \quad \gamma = \alpha h t^{1/2}. \qquad (20)$$

Складывая эти выражения, получим

$$W = \frac{A}{h^2\alpha^2}\left\{1 - \operatorname{erf}\xi - e^{-\alpha x} - \frac{1}{2}\exp(\gamma^2 + \alpha x)[1 - \operatorname{erf}(\xi + \gamma)] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\exp(\gamma^2 - \alpha x)[1 - \operatorname{erf}(\xi - \gamma)]\right\}, \qquad (21)$$

что совпадает с решением, полученным Ингерсолом и Зобелем [6].

*) Более точно $\sim 4{,}5 \cdot 10^9$ лет. — *Прим. ред.*

Вклад радиоактивности в градиент температуры у поверхности получается равным

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{A}{h^2}\,\frac{1}{q+\alpha} = \frac{A}{h^2\alpha}\,[1-\exp\gamma^2(1-\operatorname{erf}\gamma)]. \qquad (22)$$

Если, как это фактически и есть, γ велико, то

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} \doteq \frac{A}{h^2\alpha}\left(1-\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}}\right) = \frac{A}{h^2\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha h\sqrt{\pi t}}\right). \qquad (23)$$

Чтобы согласовать различного рода данные, необходимо принять, что радиоактивность сосредоточена в верхнем слое толщиной самое большее 20 *км* *).

20.07. *Шарик термометра имеет первоначально однородную температуру, равную температуре окружающей среды. Температура воздуха убывает с высотой, а термометр поднимается на воздушном шаре с такой скоростью, что температура воздуха вокруг него изменяется со временем линейно. Определить, как изменяется средняя температура ртути* [7, 8].

Температура внутри шарика удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} = h^2\nabla^2 V = \frac{h^2}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV), \qquad (1)$$

и вспомогательное уравнение получается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) = q^2 rV. \qquad (2)$$

Решение этого уравнения, ограниченное в центре шарика, есть $V=(A/r)\operatorname{sh} qr$, где A — функция времени. Температура на внешней поверхности стекла равна Gt, где G — постоянная. Но стекло имеет лишь конечную температуропроводность, так что приближенное граничное условие на поверхности ртути получается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial r} = K(Gt - V), \qquad (3)$$

где K зависит от отношения температуропроводности стекла и ртути и толщины стекла. Тогда

$$A = \frac{a^2KG/p}{Ka\operatorname{sh} qa + qa\operatorname{ch} qa - \operatorname{sh} qa}, \qquad (4)$$

где a — внутренний радиус стеклянного шарика.

*) Вопрос о распределении радиоактивных элементов в недрах Земли в настоящее время исследован более подробно. Приведенные результаты представляют лишь методический интерес. — *Прим. ред.*

Средняя температура ртути равна

$$V_0 = \frac{3}{a^2}\int_0^a r^2 V\,dr = \frac{3A}{a^2}\int_0^a r\,\mathrm{sh}\,qr\,dr =$$
$$= \frac{3KG}{apq^2}\,\frac{qa\,\mathrm{ch}\,qa - \mathrm{sh}\,qa}{Ka\,\mathrm{sh}\,qa + qa\,\mathrm{ch}\,qa - \mathrm{sh}\,qa}. \qquad (5)$$

Применяя правило разложения на элементарные дроби, замечаем, что около $p = 0$

$$V_0 = \frac{3KG}{apq^2}\,\frac{(qa)^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30}q^2a^2\right)}{qa\left(Ka + \frac{1}{6}Kq^2a^3 + \frac{1}{3}q^2a^2\right)} =$$
$$= G\left\{\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{15}\,\frac{a^2}{h^2} + \frac{1}{3}\,\frac{a}{h^2K}\right)\right\} =$$
$$= G\left\{t - \frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3aK}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Таким образом, имеется систематическое отставание температуры ртути от температуры воздуха, что должно учитываться при измерениях температуры на больших высотах.

Остальные нули знаменателя (5) дают экспоненциально убывающие слагаемые, которые были вычислены в работе Бромвича.

20.08. Периодический источник тепла. В **18.012** указывалось, что уравнение теплопроводности может иметь периодические решения при наличии периодического источника тепла. В качестве примера рассмотрим одномерную задачу, в которой температура при $x = 0$ задается в виде $S\cos\gamma t$. Будем рассматривать это как действительную часть от $S\exp(i\gamma t)$. Тогда

$$h^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial t} = i\gamma V.$$

Решение этого уравнения, стремящееся к нулю при больших x, имеет вид

$$V = Se^{-\lambda x + i\gamma t},$$

где

$$h^2\lambda^2 = i\gamma, \quad \lambda = \frac{1+i}{h}\sqrt{\frac{1}{2}\gamma} = (1+i)\varkappa.$$

Тогда

$$V = S\exp[i\gamma t - (1+i)\varkappa x]$$

и, отделяя действительную часть, находим

$$V = Se^{-\varkappa x}\cos(\gamma t - \varkappa x).$$

Это решение периодически зависит от времени, но его амплитуда экспоненциально убывает с глубиной, а фаза все время

запаздывает. На глубине $x = \pi/\varkappa$ фаза становится противоположной фазе температуры на поверхности, а амплитуда уменьшается в отношении $1 : e^{-\pi}$. Эти изменения с глубиной тем быстрее, чем короче период колебаний.

Такое поведение наблюдается в суточных и годовых колебаниях температуры почвы, причем первые становятся неощутимыми на глубине в 1 *м*, а вторые — на глубине в 18 *м*. Это играет важную роль в метеорологии, так как в океане за счет перемешивания воды тепло проникает на значительно бо́льшие глубины. Это обстоятельство даже в большей степени, чем разница теплоемкостей, объясняет бо́льшую (по сравнению с сушей) способность моря накапливать тепло, получаемое в течение лета, и согревать зимой проходящие над ним массы воздуха.

ПРИМЕРЫ

1. Однородный шар радиуса a с температуропроводностью h^2 находится при нулевой начальной температуре. Источники тепла равномерно распределены в шаре и таковы, что в отсутствие теплопроводности температура повышалась бы со скоростью P. Вне шара температура поддерживается равной нулю. Покажите, что в последующие моменты времени температура в произвольной точке шара равна

$$V = \frac{1}{6}\frac{P}{h^2}(a^2 - r^2) + \sum \frac{2P}{h^2 r}\left(\frac{a}{n\pi}\right)^3 (-1)^n \sin\frac{n\pi r}{a} \exp\left(-\frac{h^2 n^2 \pi^2 t}{a^2}\right).$$

Покажите, что при малых t градиент температуры $-\partial V/\partial r$ у поверхности приблизительно равен

$$P\left(\frac{2}{h}\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{t}{a}\right). \qquad \text{(M. T. Sched. B, 1926.)}$$

2. Однородный шар имеет начальную температуру S и охлаждается с поверхности. Градиент температуры на поверхности равен температуре поверхности, умноженной на $-\varkappa$. Докажите, что для больших времен температура поверхности приблизительно равна

$$S \exp\left(\frac{-3\varkappa h^2 t}{a}\right). \qquad \text{(M. T. Sched. B, 1928.)}$$

3. Натяжение длинной однородной струны таково, что скорость распространения волн в ней равна c. Сопротивление поперечному движению пропорционально скорости с коэффициентом пропорциональности λ. Одному концу струны мгновенно сообщается поперечное смещение y_0. Докажите, что 1) на расстоянии x движение отсутствует до момента времени $t = x/c$ и 2) наклон у возмущенного конца струны асимптотически равен

$$-\frac{y_0}{c}\left(\frac{\lambda}{\pi t}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{1}{4\lambda t} - \frac{3}{32\lambda^2 t^2} - \ldots\right). \qquad \text{(M. T. Sched. B, 1928.)}$$

4. Шар радиуса a с начальной температурой V_0 окружен безграничной средой из того же материала с начальной температурой, равной нулю. По-

кажите, что в момент времени t температура на расстоянии $r > a$ от центра шара равна

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_c^b e^{-\lambda^2} a\lambda - \frac{h\sqrt{t}}{r} \left(e^{-b^2} - e^{-c^2}\right) \right\},$$

где

$$b = \frac{r-a}{2h\sqrt{t}}, \qquad c = \frac{r+a}{2h\sqrt{t}}. \qquad \text{(I. C., 1942.)}$$

5. В области $0 < x < \pi$, $t > 0$ найдите решение уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям $z = 0$ при $x = 0$; $x = \pi$ и $z = x$ при $t = 0$.

(I.C., 1941.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jeffreys H.*, Cartesian Tensors, ch. 8.
2. *Jeffreys H.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **26**, 101—106 (1930).
3. *Heaviside O.*, Electromagnetic Theory, v. 2, p. 69—79, 287—288.
4. *Riemann G. F. B.*, *Weber H.*, Partielle Differentialgleichungen, Bd. 2, 1912, S. 95—98.
5. *Edser E.*, Heat for Advanced Students, 1908, p. 424.
6. *Ingersoll L. R.*, *Zobel O. J.*, Mathematical Theory of Heat Conduction, Ginn, 1913.
7. *McLeod A. R.*, Phil. Mag., (6) **37**, 134 (1919).
8. *Bromwich T. J.*, Phil. Mag., (6) **37**, 407—419 (1919).

Глава 21

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

„У меня позади длинная и печальная история", — сказала Мышь, поворачиваясь к Алисе со вздохом.
„Конечно, хвост длинный, — сказала Алиса, глядя на мышкин хвост с удивлением, — но почему ты называешь его печальным?"

Льюис Кэррол, „Алиса в стране чудес"

21.01. Определение функций $J_{\pm n}(x)$ и $I_{\pm n}(x)$. Мы уже встречались (**16.10. 18.03**) с функциями

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!},\qquad J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}}{r!\,(-n+r)!}. \tag{1}$$

Те же ряды, в которых все знаки взяты положительными, дают

$$I_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!},\qquad I_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}}{r!\,(-n+r)!}. \tag{2}$$

Ясно, что

$$I_n(x)=e^{-1/2n\pi i}J_n(xe^{1/2\pi i})=e^{1/2n\pi i}J_n(xe^{-1/2\pi i}), \tag{3}$$

$$I_{-n}(x)=e^{1/2n\pi i}J_{-n}(xe^{1/2\pi i})=e^{-1/2n\pi i}J_{-n}(xe^{-1/2\pi i}). \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют J_n и J_{-n}, имеет вид

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(x^2-n^2)\,y=0, \tag{5}$$

а уравнение, которому удовлетворяют I_n и I_{-n},

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)-(x^2+n^2)\,y=0. \tag{6}$$

Функции I_n и I_{-n} часто называются бесселевыми функциями мнимого аргумента.

21.011. Контурные интегралы, операционные представления. Удобные контурные интегралы для этих функций можно полу-

чить, исходя из следующего оператора для действительного и положительного t:

$$p^{-n}\exp(ap^{-1}) = p^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^r}{r!p^r} = \sum\frac{a^r}{r!p^{n+r}}, \tag{7}$$

$$p^{-n}\exp(ap^{-1})\,H(t) = a^{-1/2n}t^{1/2n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^{1/2n+r}t^{1/2n+r}}{r!\,(n+r)!}H(t) = \left(\frac{t}{a}\right)^{1/2a} I_n\left(2\sqrt{at}\right)H(t). \tag{8}$$

Следовательно, при $n > -1$, $t > 0$

$$\left(\frac{t}{n}\right)^{1/2n} I_n\left(2\sqrt{at}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \exp\left(zt+\frac{a}{z}\right)\frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{9}$$

Если теперь перейти к пути интегрирования M, который охватывает отрицательную действительную полуось и пересекает действительную положительную полуось, то интеграл будет иметь смысл для всех n и может быть также использован для представления $I_{-n}\left(2\sqrt{at}\right)$. Можно положить

$$zt = u. \tag{10}$$

Тогда (9) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}t^n\int_M \exp\left(u+\frac{at}{u}\right)\frac{du}{u^{n+1}} \tag{11}$$

и

$$I_n\left(2\sqrt{at}\right) = \frac{1}{2\pi i}(at)^{1/2n}\int_M \exp\left(u+\frac{at}{u}\right)\frac{du}{u^{n+1}}, \tag{12}$$

что справедливо без ограничений на t и n.

Если теперь положим $t = \frac{1}{4}x^2$, $a = 1$, то получим

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}x\right)^n\int_M \exp\left(u+\frac{1}{4}\frac{x^2}{u}\right)\frac{du}{u^{n+1}}, \tag{13}$$

а при $a = -1$, как видно из сравнения рядов (1) и (2),

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}x\right)^n\int_M \exp\left(u-\frac{1}{4}\frac{x^2}{u}\right)\frac{du}{u^{n+1}}. \tag{14}$$

Другая интересная форма получится, если положить

$$u = \frac{1}{2}x\lambda. \tag{15}$$

Тогда

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \exp\left[\frac{1}{2} x\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right] \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \tag{16}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \exp\left[\frac{1}{2} x\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right] \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \tag{17}$$

что справедливо, если концы контура M находятся при $\mathrm{Re}(x\lambda) = -\infty$. Это интегралы Шлефли. Положим теперь в (16)

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2\mu. \tag{18}$$

Тогда

$$\lambda = \mu + (\mu^2 - 1)^{1/2}, \tag{19}$$

причем при μ, действительном и большем 1, знак корня выбирается положительным. Тогда

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_M e^{\mu x} \frac{d\mu}{(\mu^2 - 1)^{1/2} [\mu + (\mu^2 - 1)^{1/2}]^n} \tag{20}$$

и аналогично

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_M e^{\mu x} \frac{d\mu}{(\mu^2 + 1)^{1/2} [\mu + (\mu^2 + 1)^{1/2}]^n}. \tag{21}$$

Таким образом, имеем для $I_n(x)$ и $J_n(x)$ при $n > -1$ следующие операционные представления:

$$I_n(x) H(x) = \frac{p}{(p^2 - 1)^{1/2} [p + (p^2 + 1)^{1/2}]^n} H(x), \tag{22}$$

$$J_n(x) H(x) = \frac{p}{(p^2 + 1)^{1/2} [p + (p^2 + 1)^{1/2}]^n} H(x). \tag{23}$$

21.02. Функции Ханкеля $\mathbf{Hs}_n(x)$, $\mathbf{Hi}_n(x)$, $\boldsymbol{Y}_n(x)$. Интегралы вида (13), (14) будут также удовлетворять дифференциальным уравнениям, если один предел берется при $u = 0$, когда стремление к нулю происходит в таком направлении, что $\frac{a^2}{h} \to -\infty$ для $I_n(x)$ и к $+\infty$ для $J_n(x)$. Это можно проверить непосредственно методом из **16.10**. Удобно снова взять x действительным и применить (16) и (17). Тогда $\lambda + (1/\lambda)$ стационарно при $\lambda = \pm 1$, а $\lambda - (1/\lambda)$ — при $\lambda = \pm i$. Это седловые точки, и можно выбрать проходящие через них контуры следующим образом: для $I_n(x)$ — рис. 66 (верх) и для $J_n(x)$ — рис. 66 (низ). В каждом случае сумма интегралов вдоль двух путей интегрирования в указанных направлениях равна $I_n(x)$ или $J_n(x)$ соответственно, поскольку пути интегрирования в совокупности деформируются в M.

Для последнего контура интеграл вдоль верхнего пути обозначим через $\frac{1}{2}\,\mathrm{Hs}_n(x)$, а интеграл вдоль нижнего пути — через $\frac{1}{2}\,\mathrm{Hi}_n(x)$ *). Тогда

$$2J_n(x) = \mathrm{Hs}_n(x) + \mathrm{Hi}_n(x). \tag{24}$$

Поскольку доминирующие части подынтегральных выражений вблизи соответствующих седловых точек равны $\exp(\pm ix)$, ви-

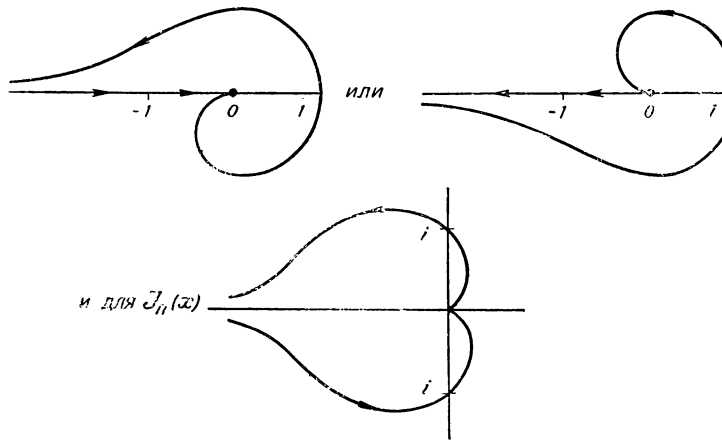

Рис. 66.

дим, что три функции в какой-то мере аналогичны $\cos x$, $\exp ix$ и $\exp(-ix)$; и если еще взять

$$2iY_n(x) = \mathrm{Hs}_n(x) - \mathrm{Hi}_n(x), \tag{25}$$

то функция $Y_n(x)$ будет аналогична $\sin x$. Кроме того,

$$\mathrm{Hs}_n(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{0,\,i}^{-\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\,x\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \tag{26}$$

$$\mathrm{Hi}_n(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty,\,-i}^{0} \exp\left[\frac{1}{2}\,x\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}. \tag{27}$$

*) Эти функции ввел Нильсен и обозначил через $H_1^n(x)$, $H_2^n(x)$. Ватсон обозначает их через $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$. Первое обозначение имеет тот недостаток, что то же самое n является нижним индексом в $J_n(x)$; второе неудобно для набора и написания и почти недоступно для печатания на машинке. Мы используем $\mathrm{Hs}_n(x)$ и $\mathrm{Hi}_n(x)$, причем s и i означают „верхний“ (superior) и „нижний“ (inferior) в соответствии с выбором путей интегрирования в интегралах Шлефли. Используются и другие обозначения.

Запись пределов интегрирования в (26) означает, что путь интегрирования идет от 0 до $-\infty$, проходя через i. Эти интегралы, являющиеся аналитическими функциями x, будут также решениями дифференциального уравнения для комплексных x, у которых $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Эти пути интегрирования преобразуются сами в себя подстановкой

$$\lambda = -\frac{1}{u}. \tag{28}$$

Но если установить правило, что аргументы принимаются равными 0 (а не 2π) для величин на положительной действительной оси, то нужно взять соответственно

$$\text{для (26):}\quad \lambda = e^{i\pi}/u; \quad \text{для (27):}\quad \lambda = e^{-i\pi}/u, \tag{29}$$

и тогда

$$\mathrm{Hs}_n(x) = \frac{1}{\pi i} e^{-n\pi i} \int_{0,\,i}^{-\infty} \exp\frac{1}{2} x \left(u - \frac{1}{u}\right) u^{n-1}\, du = e^{-n\pi i}\mathrm{Hs}_{-n}(x), \tag{30}$$

$$\mathrm{Hi}_n(x) = e^{n\pi i}\,\mathrm{Hi}_{-n}(x). \tag{31}$$

Но, кроме того, имеем

$$2J_{-n}(x) = \mathrm{Hs}_{-n}(x) + \mathrm{Hi}_{-n}(x) = e^{n\pi i}\,\mathrm{Hs}_n(x) + e^{-n\pi i}\,\mathrm{Hi}_n(x), \tag{32}$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned} i \sin n\pi\, \mathrm{Hs}_n(x) &= J_{-n}(x) - e^{-n\pi i} J_n(x), \\ i \sin n\pi\, \mathrm{Hi}_n(x) &= e^{n\pi i} J_n(x) - J_{-n}(x). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Все функции в последних двух соотношениях являются аналитическими как по x, так и по n. Их можно взять в качестве определений $\mathrm{Hs}_n(x)$ и $\mathrm{Hi}_n(x)$, за исключением случая, когда $\sin n\pi = 0$. Они всегда будут равны интегралам, получаемым из (26) и (27) путем непрерывного деформирования пути интегрирования таким образом, чтобы $\mathrm{Re}(x\lambda) \to -\infty$ на одном из концов. Кроме того, из (25)

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \tag{34}$$

Когда n — положительное целое число, функция $J_{-n}(x)$ сводится к $(-1)^n J_n(x)$; но когда n стремится к положительному целому числу, это выражение для Y_n стремится к конечному пределу, который можно взять тогда в качестве определения для $Y_n(x)$.

Итак, возьмем *)

$$Y_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J_{n+\varepsilon}(x) \cos(n+\varepsilon)\pi - J_{-n-\varepsilon}(x)}{\sin(n+\varepsilon)\pi} =$$

$$= \lim \frac{J_{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n J_{-n-\varepsilon}(x)}{\pi\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n} J_n(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x)\right]. \qquad (35)$$

Члены в (1) распадаются на два класса, в зависимости от того, имеется ли в знаменателе бесконечный факториал или нет. Общий член $J_n(x)$ равен

$$u_{n,r}(x) = (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} \qquad (36)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n} u_{n,r}(x) = (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left[\ln \frac{1}{2}x - \mathcal{F}(n+r)\right], \qquad (37)$$

где $\mathcal{F}$ — дигамма-функция. Аналогичный результат остается в силе для членов разложения $J_{-n}(x)$ при $r \geqslant n$. Однако для членов разложения J_{-n} при $r < n$ имеем

$$u_{-n-\varepsilon,r} = (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n-\varepsilon+2r}}{r!\,(-n-\varepsilon+r)!} =$$

$$= (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n-\varepsilon+2r}}{r!\,(-\varepsilon)!}(-\varepsilon)(-\varepsilon-1)\ldots(-\varepsilon-n+r+1), \qquad (38)$$

$$\frac{\partial u_{-n,r}}{\partial n} = (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}}{r!\,0!}(-1)^{n-r-2}(n-r-1)! =$$

$$= (-1)^n \frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}. \qquad (39)$$

---

*) В различных пособиях по функциям Бесселя существует поразительное многообразие обозначений. Функция Y_n, как Ватсона, так и наша, обозначена Янке и Эмде через N_n, Хевисайдом через $-G_n$ и через $\pm 2K_n/\pi$ различными другими авторами. У Грея, Метьюза и Макроберта $G_n(x) = \frac{1}{2} i\pi \operatorname{Hs}_n(x)$, причем G_n употребляется также в других смыслах. Подробности об обозначениях для этой и других функций Бесселя см. в [1].

Следовательно,

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left[\ln\frac{1}{2}x - \mathcal{F}(n+r)\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}(-1)^n \sum_{r=n}^{\infty}(-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}}{r!\,(-n+r)!}\left[\ln\frac{1}{2}x - \mathcal{F}(-n+r)\right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}. \qquad (40)$$

Положим во второй строке $r = n+s$. Он примет вид

$$\frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2s}}{s!\,(n+s)!}\left[\ln\frac{1}{2}x - \mathcal{F}(s)\right], \qquad (41)$$

и

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{1}{2}x - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left[\mathcal{F}(r) + \mathcal{F}(n+r)\right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r} \qquad (42)$$

при n положительном целом или равном 0. Функция Y_n всегда имеет особенность в начале координат и поэтому не может фигурировать ни в каком решении, которое должно иметь

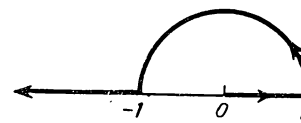

Рис. 67.

смысл в центре круга. Однако она может появляться в решениях, которые справедливы между двумя концентрическими окружностями.

21.021. Интегралы для $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ вдоль действительных путей. Другое интегральное представление для $\mathrm{Hs}_n(x)$ можно получить, выбирая путь интегрирования в (26), показанный на рис. 67. На отрезке от 0 до 1 положим $\lambda = e^{-u}$. Тогда эта часть

интеграла будет равна

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \exp\left[\frac{1}{2}x\left(e^{-u}-e^{u}\right)\right]e^{nu}\,du=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \exp\left(-x\,\mathrm{sh}\,u+nu\right)du. \qquad (43)$$

На полуокружности от $+1$ до -1 положим $\lambda=\exp(i\theta)$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(ix\sin\theta)\exp(-ni\theta)\,d\theta. \qquad (44)$$

От -1 до $-\infty$ полагаем $\lambda=\exp(u+i\pi)$. Эта часть равна

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{sh}\,u)\exp(-nu-n\pi i)\,du, \qquad (45)$$

и в целом

$$\mathrm{Hs}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(ix\sin\theta-ni\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{sh}\,u)\left[\exp nu+\exp(-nu-n\pi i)\right]du. \qquad (46)$$

Поскольку при действительном x функции Hs_n и Hi_n комплексно сопряженные, то

$$\mathrm{Hi}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(-ix\sin\theta+ni\theta)\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{sh}\,u)\left[\exp nu+\exp(-nu+n\pi i)\right]du \qquad (47)$$

и

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{sh}\,u-nu)\sin n\pi\,du, \qquad (48)$$

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{sh}\,u)\left[\exp nu+\exp(-nu)\cos n\pi\right]du. \qquad (49)$$

Эти представления справедливы при $\mathrm{Re}(x)>0$, причем первая формула (47) справедлива также при $\mathrm{Re}(x)=0$, если $\mathrm{Re}(n)>0$. Если n — положительное целое, $J_n(x)$ сводится к первому интегралу, который известен как интеграл Бесселя. Он фигурирует в выражении для радиуса-вектора движущейся планеты в зависимости от угла.

21.022. Интегралы для $I_n(x)$ по действительным путям интегрирования; второе решение $\mathrm{Kh}_n(x)$. Можно получить аналогичные выражения для контурных интегралов, представляющих $I_n(x)$, при этом примем x комплексным с положительной действительной частью и выберем соответствующий путь интегрирования; можно также действовать непосредственно

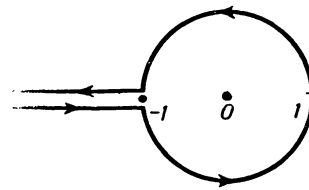

Рис. 68.

следующим образом. Используя (16), выберем контур в плоскости λ в виде, показанном на рис. 68. На окружности полагаем

$$\lambda = e^{i\theta}. \tag{50}$$

Тогда вклад в $I_n(x)$ от этой части контура равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(x\cos\theta - ni\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\exp(x\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta. \tag{51}$$

На участке от $-\infty$ до -1 и от -1 до $-\infty$ положим

$$\lambda = \exp(u - i\pi), \quad \lambda = \exp(u + i\pi). \tag{52}$$

Вклады от этих участков равны

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\exp(-x\,\mathrm{ch}\,u - nu)\,e^{ni\pi}\,du + \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\exp(-x\,\mathrm{ch}\,u - nu)\,e^{-n\pi i}\,du = \\ = -\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-x\,\mathrm{ch}\,u - nu)\,du. \tag{53}$$

Отсюда

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(x\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-x\operatorname{ch} u - nu)\, du. \quad (54)$$

Кроме того,

$$I_{-n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(x\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta + \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-x\operatorname{ch} u + nu)\, du \quad (55)$$

и

$$I_{-n}(x) - I_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-x\operatorname{ch} u)\operatorname{ch} nu\, du. \quad (56)$$

Введем обозначение *)

$$\mathrm{Kh}_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-x\operatorname{ch} u)\operatorname{ch} nu\, du. \quad (57)$$

Тогда $\mathrm{Kh}_n(x)$ имеет смысл даже для целых n при условии, что $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Рассмотрим отдельно интеграл от $-\infty$ до 0 при $\arg\lambda = -\pi$. Тогда часть от $-\infty$ до -1 дает, как прежде, $-\frac{1}{2\pi i} e^{ni\pi} \times \int_0^{\infty} \exp(-x\operatorname{ch} u - nu)\, du$. В интервале от -1 до 0 положим

$$\lambda = \exp(-u - i\pi).$$

Это дает

$$-\frac{1}{2\pi i} e^{ni\pi}\int_0^{\infty} \exp(-x\operatorname{ch} u + nu)\, du,$$

*) Эта функция использовалась Хевисайдом; Ватсон, следуя Макдональду, принимает $K_n(x) = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{Kh}_n(x)$, хотя он явно признает, что этот множитель усложняет связь с $\mathrm{Hs}_n(x)$ и $\mathrm{Hi}_n(x)$. Кроме того, усложняется связь с функцией Лежандра $q_n^s(\mu)$. Опубликованные таблицы содержат функции Макдональда, однако соотношения между K_n, Hs_n и Hi_n используются столь часто, что наиболее удобным будет деление табличных значений на $\pi/2$. В отличие от функции Макдональда мы обозначаем функцию Хевисайда через $\mathrm{Kh}_n(x)$.

и интеграл в целом равен

$$-\frac{1}{\pi i}e^{ni\pi}\int_0^\infty \exp(-x\operatorname{ch}u)\operatorname{ch}nu\,du=-\frac{e^{ni\pi}}{2i}\operatorname{Kh}_n(x). \qquad (58)$$

Функцию $\operatorname{Kh}_n(x)$ можно обратно преобразовать к виду Шлефли. Имеем

$$\operatorname{Kh}_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\operatorname{ch}v)\operatorname{ch}nv\,dv=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x\operatorname{ch}v+nv)\,dv \qquad (\operatorname{Re}x>0). \qquad (59)$$

Положим $e^v=\lambda$. Тогда

$$\operatorname{Kh}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\right]\lambda^{n-1}\,d\lambda \qquad (\operatorname{Re}x>0); \qquad (60)$$

и если $\frac{1}{2}x\lambda=u$, то

$$\operatorname{Kh}_n(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}\int_0^\infty \exp\left(-u-\frac{1}{4}\frac{x^2}{u}\right)u^{n-1}\,du, \quad |\arg x|<\frac{1}{4}\pi. \qquad (61)$$

Ясно, что $\operatorname{Kh}_n(x)=\operatorname{Kh}_{-n}(x)$, так что можно всегда считать $n\geqslant 0$. По непрерывности те же представления будут справедливы при $\operatorname{Re}(x)=0$ или $\operatorname{Re}(x^2)=0$ при условии, что интегралы сходятся. В частности, (61) верно, если $\operatorname{Re}(x^2)=0$ и $n>0$.

Функцию Kh_n можно непосредственно выразить через Hs_n или Hi_n. Так, используя исходные соотношения между функциями I и J, имеем

$$\sin n\pi\operatorname{Kh}_n(x)=I_{-n}(x)-I_n(x)= \qquad (62)$$

$$=e^{\frac{1}{2}n\pi i}J_{-n}(xe^{\frac{1}{2}\pi i})-e^{-\frac{1}{2}n\pi i}J_n(xe^{\frac{1}{2}\pi i})= \qquad (63)$$

$$=i\sin n\pi e^{\frac{1}{2}n\pi i}\operatorname{Hs}_n(xe^{\frac{1}{2}\pi i}), \qquad (64)$$

$$\sin n\pi\operatorname{Kh}_n(x)=e^{-\frac{1}{2}n\pi i}J_{-n}(xe^{-\frac{1}{2}\pi i})-e^{\frac{1}{2}n\pi i}J_n(xe^{-\frac{1}{2}\pi i})= \qquad (65)$$

$$=-i\sin n\pi e^{-\frac{1}{2}n\pi i}\operatorname{Hi}_n(xe^{-\frac{1}{2}\pi i}). \qquad (66)$$

Откуда

$$\operatorname{Kh}_n(x)=ie^{\frac{1}{2}n\pi i}\operatorname{Hs}_n(xe^{\frac{1}{2}\pi i})=-ie^{-\frac{1}{2}n\pi i}\operatorname{Hi}_n(xe^{-\frac{1}{2}\pi i}). \qquad (67)$$

Эти соотношения показывают, что все функции Бесселя при заданном n можно выразить через единственную функцию $\operatorname{Kh}_n(x)$.

При n, равном положительному целому числу или нулю, $\mathrm{Kh}_n(x)$ можно представить как

$$\mathrm{Kh}_n(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I_{-n-\varepsilon}(x) - I_{n+\varepsilon}(x)}{\sin\pi(n+\varepsilon)} = \frac{1}{\pi}(-1)^n \frac{\partial}{\partial n}[I_{-n}(x) - I_n(x)] =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi} I_n(x)\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + (-1)^n \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2r}}{(n+r)!}[\mathcal{F}(r)+\mathcal{F}(n+r)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n+2r}, \qquad (69)$$

и, в частности,

$$\mathrm{Kh}_0(x) = -\frac{2}{\pi} I_0(x)\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2r}}{r!r!}\mathcal{F}(r). \qquad (70)$$

21.03. Другие контурные интегралы для $J_n(x)$. Другие интегральные представления функций Бесселя можно получить, положив в уравнении для $J_n(x)$

$$y = x^{-n}u. \qquad (71)$$

Тогда

$$xu'' - (2n-1)u' + xu = 0. \qquad (72)$$

Сделаем подстановку

$$u = \int e^{zx} Z\, dz, \qquad (73)$$

где путь интегрирования будет определен позже. Тогда

$$xu'' - (2n-1)u' + xu = \int [xz^2 - (2n-1)z + x] Ze^{zx}\, dz =$$

$$= [(z^2+1)Ze^{zx}] - \int e^{zx}[(z^2+1)Z' + (2n+1)zZ]\, dz, \qquad (74)$$

и если подинтегральное выражение справа должно обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{Z'}{Z} = -\frac{(2n+1)z}{z^2+1}, \qquad (75)$$

то

$$Z \propto (z^2+1)^{-(n+1/2)}. \qquad (76)$$

Тогда решение будет

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_M \frac{e^{zx}}{(z^2+1)^{n+1/2}}\, dz, \qquad (77)$$

где $\mathrm{Re}(zx) \to \infty$ на концах пути интегрирования. Если $n > -\frac{1}{2}$, то этот интеграл будет сходиться на стандартном контуре Бромвича,

и мы получаем операционное представление $p/(p^2+1)^{n+1/2}$. Первый член разложения этого выражения равен $p^{-2n}=x^{2n}/(2n)!$ Это определяет решение как произведение постоянной на $x^n J_n(x)$, и в действительности оно равно $\frac{2^n n!}{(2n)!}x^n J_n(x)$, что можно проверить непосредственным разложением знаменателя по нисходящим степеням z. Затем, используя формулу удвоения для $(2n)!$, получим

$$\frac{p}{(p^2+1)^{n+1/2}}H(x)=\frac{\pi^{1/2}}{2^n\left(n-\frac{1}{2}\right)!}x^n J_n(x)\,H(x). \tag{78}$$

Этот результат таким же путем был найден Ван дер Полем. Очевидно, что, хотя уравнение (72) второго порядка и должно иметь другое решение $x^n J_{-n}(x)$, мы нашли только одно решение. Однако подынтегральное выражение в (77) имеет точки ветвления $\pm i$. Если окружить их контуром в виде восьмерки или в виде петли, уходящей в $-\infty$ и охватывающей одну из точек ветвления, то мы получим другие решения. Аналогичные интегралы использовались Ватсоном в гл. 6 его книги.

Если $n+\frac{1}{2}$ — целое число, то подынтегральное выражение однозначно и решения выразятся конечным числом членов, как мы уже видели при рассмотрении асимптотических разложений для этого случая. Настоящая форма имеет одно преимущество по сравнению с формой, использованной Ватсоном: у него подынтегральное выражение содержит множитель, который в наших обозначениях имел бы вид $(z^2+1)^{n-1/2}$, и если $n-\frac{1}{2}$ будет положительным целым или нулем, то интегралы будут обращаться в нуль. Это осложнение устраняется тем, что мы имеем сомножитель $(z^2+1)^{-n-1/2}$. С другой стороны, его выражение более удобно в обращении, когда путь интегрирования сводится к петле, охватывающей точку ветвления.

21.04. Рекуррентные формулы. Возвращаясь к выражению

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}x\right)^n\int_M \exp\left(u-\frac{1}{4}\frac{x^2}{u}\right)\frac{du}{u^{n+1}} \tag{1}$$

и дифференцируя его, получим

$$J_n'(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1}\int_M \exp\left(u-\frac{1}{4}\frac{x^2}{u}\right)\frac{du}{u^{n+1}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}x\right)^n\int_M \exp\left(u-\frac{1}{4}\frac{x^2}{u}\right)\frac{x}{2}\frac{du}{u^{n+2}}=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x). \tag{2}$$

Дифференцирование выражения

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \exp\left[\frac{1}{2}x\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} \tag{3}$$

дает

$$J_n'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \exp\left[\frac{1}{2}x\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^n}-\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2}J_{n-1}(x)-\frac{1}{2}J_{n+1}(x). \tag{4}$$

Вычитая (2) из (4), получим

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x). \tag{5}$$

Кроме того, (4) и (5) дают

$$J_n'(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x). \tag{6}$$

Здесь дифференцировались интегралы по контуру M, которые дают $J_n(x)$. Однако совершенно также можно было бы дифференцировать интегралы по контурам, приводящим к $\mathrm{Hs}_n(x)$ и $\mathrm{Hi}_n(x)$, которые, следовательно, удовлетворяют тем же самым рекуррентным соотношениям, и тогда в силу определения функции $Y_n(x)$ она также будет удовлетворять этим соотношениям.

Соответствующие соотношения для $I_n(x)$ и $\mathrm{Kh}_n(x)$ несколько отличаются за счет различия знаков у $1/u$ и $1/\lambda$ в показателе экспоненты. Они имеют вид

$$I_n'(x)=\frac{n}{x}I_n(x)+I_{n+1}(x)=$$

$$=-\frac{n}{x}I_n(x)+I_{n-1}(x)=\frac{1}{2}I_{n-1}(x)+\frac{1}{2}I_{n+1}(x), \tag{7}$$

$$I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}I_n(x), \tag{8}$$

$$\mathrm{Kh}_n'(x)=\frac{n}{x}\mathrm{Kh}_n(x)-\mathrm{Kh}_{n+1}(x)=-\frac{n}{x}\mathrm{Kh}_n(x)-\mathrm{Kh}_{n-1}(x)=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{Kh}_{n-1}(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Kh}_{n+1}(x), \tag{9}$$

$$\mathrm{Kh}_{n-1}(x)-\mathrm{Kh}_{n+1}(x)=-\frac{2n}{x}\mathrm{Kh}_n(x). \tag{10}$$

Используя эти соотношения, можно по заданным функциям Бесселя при $n=0$ и $n=1$ построить одноименные функции для любого целого n.

Особенно важными являются соотношения

$$J_0'(x) = -J_1(x), \qquad \frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x); \tag{11}$$

$$I_0'(x) = I_1(x), \qquad \frac{d}{dx}[xI_1(x)] = xI_0(x); \tag{12}$$

$$\mathrm{Kh}_0'(x) = -\mathrm{Kh}_1(x), \quad \frac{d}{dx}[x\,\mathrm{Kh}_1(x)] = -x\,\mathrm{Kh}_0(x). \tag{13}$$

Эти соотношения используются в гидродинамических задачах для цилиндра, если радиальная скорость пропорциональна J_0, а азимутальная скорость пропорциональна J_1, и наоборот.

21.05. Асимптотические формулы стоксовского типа. Эти формулы наиболее просто получаются для $\mathrm{Hs}_n(x)$, $\mathrm{Hi}_n(x)$ и $\mathrm{Kh}_n(x)$, потому что естественные пути интегрирования для этих функций проходят только через одну седловую точку. Представления (26) и (27) из **21.02**, по-видимому, наиболее удобны для получения первого члена разложения, поскольку в них положение седловых точек не зависит от x. Вводя

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}x\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right), \quad f''(i) = -x/i^3 = -ix, \tag{1}$$

находим, что подынтегральное выражение для $\mathrm{Hs}_n(x)$ при $\lambda = i$ равно

$$\frac{1}{\pi i}\exp(ix)\exp\left[-\frac{1}{2}(n+1)\pi i\right] \tag{2}$$

и линия наискорейшего спуска при x действительном и положительном проходит под углом $^3/_4\pi$ к положительной действительной оси. Тогда

$$\mathrm{Hs}_n(x) \sim \frac{1}{\pi i}\exp i\left[x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2}\pi\right]\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) =$$
$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right], \tag{3}$$

и аналогично

$$\mathrm{Hi}_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\exp\left[-i\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right]. \tag{4}$$

Откуда

$$J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \tag{5}$$

$$Y_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{6}$$

Эти соотношения определяют коэффициенты при соответствующих первых членах разложения. Остальная часть разложений

также может быть определена из самих интегралов, однако наиболее просто она находится из дифференциального уравнения, как в **17.121.** Имеем

$$\mathrm{Hs}_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp i\left(x - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right)(U - iV), \tag{7}$$

$$\mathrm{Hi}_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[-i\left(x - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right](U + iV), \tag{8}$$

$$J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[U\cos\left(x - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right) + V\sin\left(x - \tfrac{1}{2}\pi n - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right], \tag{9}$$

$$Y_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[U\sin\left(x - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right) - V\cos\left(x - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right)\right], \tag{10}$$

где

$$U \sim 1 - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{2!\,(8x)^2} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)(49-4n^2)}{4!\,(8x)^4} - \ldots, \tag{11}$$

$$V \sim \frac{1-4n^2}{8x} - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{3!\,(8x)^3} + \ldots. \tag{12}$$

Это стоксовские разложения. Мы брали x действительным и положительным, но легко видеть, что это условие может быть ослаблено. В самом деле, при комплексном x мы по-прежнему получим правильное значение подынтегрального выражения при $\lambda = i$, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Направление пути интегрирования изменяется на $-\frac{1}{2}\arg x$, и это учитывается сомножителем $x^{-1/2}$. Существует, однако, предел для допустимых значений $\arg x$. В самом деле, допустим, что аргумент непрерывно увеличился на 2π. Функция $J_n(x)$ умножается на $\exp(2ni\pi)$ и возвращается к своему исходному значению, если n — положительное целое. Но в (9) все члены умножаются на $\exp(-i\pi)$. Мы уже знаем, что асимптотическое разложение не может быть верно для всех значений $\arg x$, если оно не сходится. Здесь мы видим, что неограниченная свобода изменения $\arg x$ привела бы к совершенно неверным результатам. Чтобы проследить причину происходящих изменений, заметим, что с ростом $\arg x$, если мы придерживаемся путей наискорейшего спуска, путь вблизи каждой седловой точки повернется в отрицательном направлении на половину приращения $\arg x$, и в дальнейшем $\arg\lambda$ должен уменьшаться при $|\lambda| = \infty$ и возрастать при малых $|\lambda|$ на ту же величину, на которую возрастает $\arg x$.

Пусть $\arg x$ увеличился от 0 до 2π. Тогда линии наискорейшего спуска совершенно те же, что и вначале, однако

направления прохождения через седловые точки меняются на обратные, и *поэтому они проходятся в направлениях, противоположных начальным*, если мы пытаемся сохранить непрерывность аппроксимации. Ясно, однако, что это приводит к неправильному результату. В самом деле, при n положительном целом мы должны прийти обратно к тому же значению $J_n(x)$, а $\mathrm{Hs}_n(x)$ всегда есть интеграл от 0 до $\infty \exp(i\pi - i \arg x)$ и $\mathrm{Hi}_n(x)$ — интеграл от $\infty \exp(-i\pi - i \arg x)$ до 0, причем в сумме эти два пути интегрирования образуют петлю с положительным обходом начала координат. Перемена знака происходит оттого, что асимптотические выражения перестают представлять $\mathrm{Hs}_n(x)$ и $\mathrm{Hi}_n(x)$ в интервале $0 \leqslant \arg x \leqslant 2\pi$, и причина этого заключается в том, что при некотором значении $\arg x$ непрерывное деформирование пути наискорейшего спуска вблизи седловой точки приводит к тому, что путь начинает идти из начала координат в бесконечность, вместо того чтобы идти из бесконечности в начало координат. Положим $\arg x = \frac{1}{2}\pi$. Путь для $\mathrm{Hs}_n(x)$ идет прямо по мнимой оси, и затруднений не возникает. Однако путь для $\mathrm{Hi}_n(x)$ пойдет, как показано на рис. 69, где штриховой линией указан путь для $\arg x$ немного меньше, чем $\frac{1}{2}\pi$. Если $\arg x$ несколько больше, чем $\frac{1}{2}\pi$, то мы могли бы выбрать путь в подходящем направлении из бесконечности до i, затем по полной окружности и от i в начало координат снова в подходящем направлении, и тогда $\mathrm{Hi}_n(x)$ было бы получено правильно. Но это не был бы путь наискорейшего спуска (другая штриховая линия), ибо если бы он проходил слева направо вблизи $-i$, то пересекал бы окружность изнутри и шел бы от 0 до бесконечности. Мы можем видеть, что разница интегралов вдоль этих двух путей равна $2\mathrm{Hs}_n(x)$. Это не имеет значения для определения асимптотического разложения, так как каждый член $\mathrm{Hs}_n(x)$ содержит экспоненциально малый множитель, когда $0 < \arg x < \pi$, и весь ряд при $|x|$ достаточно большом будет мал по сравнению с любым членом ряда $\mathrm{Hi}_n(x)$. Поэтому эти разложения справедливы при $0 \leqslant \arg x < \pi$, однако при $\arg x = \pi$ модули первых членов становятся равными и новая часть Hi_n станет больше. Следовательно, асимптотическое разложение

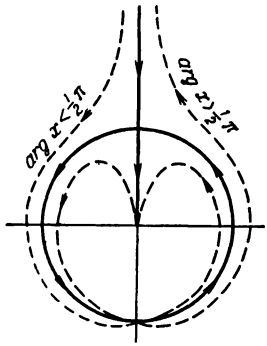

Рис. 69.

для $\mathrm{Hi}_n(x)$ не справедливо при $\arg x > \pi$. Аналогичным образом разложение $\mathrm{Hs}_n(x)$ при $\arg x = \frac{3}{2}\pi$ станет представлять функцию, содержащую кратное $\mathrm{Hi}_n(x)$, и новая часть станет большей при $\arg x = 2\pi$. Некоторые дальнейшие рассмотрения показывают, что интервалы справедливости асимптотических разложений есть $-\pi < \arg x < 2\pi$ для $\mathrm{Hs}_n(x)$ и $-2\pi < \arg x < \pi$ для $\mathrm{Hi}_n(x)$. Основывающиеся на них разложения для $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ будут поэтому справедливы при $-\pi < \arg x < \pi$, но, конечно, не справедливы при $\arg x = \pm\pi$.

25.051. Асимптотические формулы для $I_n(x)$ и $\mathrm{Kh}_n(x)$ могут быть получены из рассмотренных заменой аргумента в (3), (4) или непосредственно из интегралов **21.022** (51), (60). Последующие члены находятся из дифференциального уравнения.

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + \frac{1-4n^2}{1!\,8x} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{2!\,(8x)^2} + \ldots\right], \qquad (13)$$

$$\mathrm{Kh}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-x}\left[1 - \frac{1-4n^2}{1!\,8x} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{2!\,(8x)^2} - \ldots\right]. \qquad (14)$$

Можно показать, что для действительного аргумента ошибка при остановке на каком-либо члене ряда U и V имеет тот же знак, что и первый отброшенный член, и поэтому функция заключена между суммами r и $r+1$ членов ряда, если число оставленных членов столь велико, что последовательные члены чередуют знак [2]. То же справедливо для $\mathrm{Kh}_n(x)$, но соответствующее неравенство для $I_n(x)$ более сложно.

21.052. Интерпретация функций $\mathrm{Kh}_0(p\bar{\omega}/c)$, $p\,\mathrm{Kh}_0(p\bar{\omega}/c)$, $\mathrm{Kh}_0(q\bar{\omega})$. Физические приложения этих функций определяются экспоненциальными множителями в их асимптотических разложениях. Там, где для одномерной волны, распространяющейся в положительном направлении оси,

$$\cos\varkappa(ct - x) = \mathrm{Re}\exp i\varkappa(ct - x),$$

для симметричной волны в двух измерениях мы должны писать $\mathrm{Re}\, e^{i\varkappa ct}\,\mathrm{Hi}_0(\varkappa\bar{\omega})$, причем фаза волны при больших $\varkappa\bar{\omega}$ будет распространяться наружу со скоростью c. Функция $D_0(x)$, используемая в „Гидродинамике“ Ламба (3), совпадает с $-i\,\mathrm{Hi}_0(x)$. Функция $\mathrm{Hi}_n(x)$ является поэтому особенно удобной для изучения распространения гармонических волн.

Конечность $I_n(x)$ в начале координат делает ее подходящей функцией для использования в задачах, относящихся к внутренности круга, но так как $I_n(x)$ стремится к бесконечности

вместе с x, подходящей функцией мнимого аргумента для использования во внешности круга является $\mathrm{Kh}_n(x)$. Функция $\mathrm{Kh}_0(pa)$, где p — оператор Хевисайда, постоянно встречается в задачах о распространении цилиндрических возмущений и играет роль, аналогичную $\exp(-ph)$ в одном измерении.

Простейшее представление этой функции имеет вид

$$\mathrm{Kh}_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{ch}\,u)\,du. \tag{1}$$

Тогда

$$\mathrm{Kh}_0\left(\frac{p\bar\omega}{c}\right)H(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_L \exp\left(zt - \frac{z\bar\omega}{c}\,\mathrm{ch}\,u\right)du\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H\left(t - \frac{\bar\omega}{c}\,\mathrm{ch}\,u\right)du, \tag{2}$$

$$\mathrm{Kh}_0\left(\frac{p\bar\omega}{c}\right)H(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < \frac{\bar\omega}{c}\right), \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\mathrm{Arch}\,ct/\bar\omega} & \left(t > \frac{\bar\omega}{c}\right), \end{cases}$$

и поэтому в общем случае

$$\mathrm{Kh}_0\left(\frac{p\bar\omega}{c}\right)H(t) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arch}\,\frac{ct}{\bar\omega}\,H\left(t - \frac{\bar\omega}{c}\right). \tag{3}$$

Оператор $\mathrm{Kh}_0(p\bar\omega/c)$ дает поэтому возмущение, возникающее в момент времени $\bar\omega/c$ и распространяющееся со скоростью c; его величина в фиксированной точке будет неограниченно возрастать со временем. Однако дифференцированием мы получим более обычный оператор

$$p\,\mathrm{Kh}_0(p\bar\omega/c)\,H(t) = \frac{2}{\pi}\,\frac{c}{(c^2t^2 - \bar\omega^2)^{1/2}}\,H\left(t - \frac{\bar\omega}{c}\right). \tag{4}$$

Здесь сразу обнаруживается характерная черта волн в двух измерениях; в противоположность одному и трем измерениям возмущения в двух измерениях не имеют заднего фронта, а оставляют бесконечно растянутый след.

Теперь если

$$h > 0, \quad p = h^2q^2, \tag{5}$$

то

$$\mathrm{Kh}_0(q\tilde{\omega})\,H(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-u-\frac{1}{4}\frac{q^2\tilde{\omega}^2}{u}\right)\frac{du}{u}H(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-u-\frac{1}{4}\frac{p\tilde{\omega}^2}{h^2u}\right)\frac{du}{u}H(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u}H\left(t-\frac{\tilde{\omega}^2}{4h^2u}\right)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\tilde{\omega}^2/4h^2t}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du H(t)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{ei}\,\frac{\tilde{\omega}^2}{4h^2t}\,H(t). \qquad (6)$$

Дифференцируя по t, получим при $t>0$

$$p\,\mathrm{Kh}_0(q\tilde{\omega})\,H(t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-\tilde{\omega}^2/4h^2t}}{\tilde{\omega}^2/4h^2t}\,\frac{\tilde{\omega}^2}{4h^2t^2}=\frac{e^{-\tilde{\omega}^2/4h^2t}}{\pi t} \qquad (7)$$

и, кроме того,

$$q\tilde{\omega}\,\mathrm{Kh}_1(q\tilde{\omega})\,H(t)=-q\tilde{\omega}\,\mathrm{Kh}_0'(q\tilde{\omega})=-\tilde{\omega}\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}\mathrm{Kh}_0(q\tilde{\omega})=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-\tilde{\omega}^2/4h^2t}}{\tilde{\omega}^2/4h^2t}\,\frac{2\tilde{\omega}^2}{4h^2t}=\frac{2}{\pi}\,e^{-\tilde{\omega}^2/4h^2t}. \qquad (8)$$

Эти операторы, которые встречаются в задачах о диффузии в круговых цилиндрах, являются частными случаями некоторых операторов, приводящих к вырожденным гипергеометрическим функциям.

21.06. Функции высшего порядка, асимптотические формулы гриновского типа. Асимптотические приближения для больших n были найдены **(17.132)** с точностью до постоянных множителей из непосредственного исследования дифференциальных уравнений. Постоянные множители можно определить путем сравнения со стоксовскими разложениями при x, много большем n. Эти асимптотические формулы могут быть найдены методом наискорейшего спуска, как это было сделано Дебаем. Мы проиллюстрируем это на функциях $I_n(x)$ и $\mathrm{Kh}_n(x)$ при x действительном и положительном. Из **21.022** (57) имеем

$$\mathrm{Kh}_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{ch}\,u)\,\mathrm{ch}\,nu\,du \doteq$$

$$\doteq\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\,\mathrm{ch}\,u+nu)\,du=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp[f(u)]\,du, \qquad (1)$$

так как член с $\exp(-nu)$ монотонно убывает с ростом u и, как легко показать, пренебрежимо мал при больших n по сравнению с членом, содержащим $\exp(nu)$. Путь наискорейшего спуска совпадает с действительной осью. Подынтегральное выражение максимально при

$$f'(u) = n - x \operatorname{sh} u = 0, \tag{2}$$

и при

$$\operatorname{sh} u = \frac{n}{x}, \quad f''(u) = -x \operatorname{ch} u, \quad f(u) = a \operatorname{Arsh} \frac{n}{x} - (x^2 + n^2)^{1/2}$$

$$\mathrm{Kh}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-n} (n^2 + x^2)^{-1/4} [n + (n^2 + x^2)^{1/2}]^n \exp[-(n^2 + x^2)^{1/2}]. \tag{3}$$

Для $I_n(x)$ можно использовать **21.011** (20):

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \exp[f(\mu)] \frac{d\mu}{(\mu^2 - 1)^{1/2}}, \tag{4}$$

где

$$f(\mu) = \mu x - n \ln[\mu + (\mu^2 - 1)^{1/2}]. \tag{5}$$

Имеется седловая точка, определяемая уравнением

$$f'(\mu) = x - \frac{n}{(\mu^2 - 1)^{1/2}} = 0, \tag{6}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)^{1/2}, \quad f''(\mu) = \frac{n\mu}{(\mu^2 - 1)^{3/2}} = \frac{x^2}{n} \left(\frac{x^2}{n^2} + 1\right)^{1/2}, \\ f(\mu) &= (x^2 + n^2)^{1/2} - n \ln\left[\left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)^{1/2} + \frac{n}{x}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Так как $f''(\mu)$ положительно, линия наискорейшего спуска параллельна мнимой оси, и мы находим

$$I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^n (n^2 + x^2)^{-1/4} [n + (n^2 + x^2)^{1/2}]^{-n} \exp(n^2 + x^2)^{1/2}. \tag{8}$$

Соответствующие асимптотические выражения для $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ при $x < n$ имеют вид

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^n (n^2 - x^2)^{-1/4} [n + (n^2 - x^2)^{1/2}]^{-n} \exp(n^2 - x^2)^{1/2}, \tag{9}$$

$$Y_n(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-n} (n^2 - x^2)^{-1/4} [n + (n^2 - x^2)^{1/2}]^n \exp[-(n^2 - x^2)]^{1/2}, \tag{10}$$

а при $x > n$

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (x^2 - n^2)^{-1/4} \sin\left[n(\operatorname{tg} v - v) + \frac{1}{4}\pi\right], \tag{11}$$

$$Y_n(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (x^2 - n^2)^{-1/4} \cos\left[n(\operatorname{tg} v - v) + \frac{1}{4}\pi\right], \tag{12}$$

где $\sec v = x/n$.

Были получены и дальнейшие члены этих разложений, которые приводятся Бикли [4] до n^{-11}, однако рекуррентное соотношение является более сложным, чем для стоксовских разложений. Первый член при $x > n$ дает фактически вполне хорошее приближение правее первого нуля $J_n(x)$.

21.07. Применение вронскиана. Запишем уравнение Бесселя в виде

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{1}$$

Тогда, если взять вронскиан для любых двух решений y_1, y_2, получим

$$W(y_1, y_2) = A \exp\left(-\int^x \frac{dx}{x}\right) = \frac{A}{x}, \tag{2}$$

в частности,

$$J'_n(x)\, J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)\, J_n(x) = \frac{A}{x}. \tag{3}$$

Постоянную можно определить, рассматривая первые члены

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!} + \ldots, \quad J_{-n}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}}{(-n)!} + \ldots,$$

$$J'_n(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots, \quad J'_{-n}(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n-1}}{(-n-1)!} + \ldots$$

и

$$A = \frac{1}{(n-1)!\,(-n)!} - \frac{1}{(-n-1)!\,n!} = \frac{2n}{n!\,(-n)!} = \frac{2\sin n\pi}{\pi}. \tag{4}$$

Отсюда сразу следует, что если n нецелое, то $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ являются двумя независимыми решениями, а при n целом они пропорциональны друг другу. Кроме того,

$$J_n(x)\, Y'_n(x) - J'_n(x)\, Y_n(x) = \frac{2}{\pi x}, \tag{5}$$

$$I'_n(x)\, \mathrm{Kh}_n(x) - I_n(x)\, \mathrm{Kh}'_n(x) = \frac{2}{\pi x}. \tag{6}$$

Числовые множители в (5) и (6) также легко получаются из рассмотрения асимптотических приближений для больших x **(21.051)**. (Существование асимптотических разложений для производных сразу следует из рекуррентных соотношений.)

21.08. Функции полуцелого порядка. Из асимптотических разложений **(17.121)** мы видели, что такие функции можно

выразить конечным числом членов. Компактно это можно сделать с помощью рекуррентных соотношений. В каждом случае мы возьмем соотношение, которое содержит функцию порядка $n+1$, порядка n и производную последней. Тогда, умножая соотношение для $J_{n+1}(x)$ [**21.04** (2)] на x^{-n}, получим

$$x^{-n}J_{n+1}(x) = -x^{-n}J_n'(x) + nx^{-n-1}J_n(x) = -\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)], \quad (1)$$

$$x^{-n-1}J_{n+1}(x) = -\frac{d}{x\,dx}[x^{-n}J_n(x)] \quad (2)$$

и по индукции

$$J_{n+m}(x) = (-1)^m x^{n+m}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m [x^{-n}J_n(x)]. \quad (3)$$

В частности,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x, \quad (4)$$

и поэтому

$$J_{m+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(-1)^m x^{m+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

Поскольку нам известен экспоненциальный множитель для функций Ханкеля, мы сразу догадываемся, что

$$\mathrm{Hs}_{m+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(-1)^m x^{m+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m\left(-\frac{ie^{ix}}{x}\right), \quad (6)$$

$$\mathrm{Hi}_{m+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(-1)^m x^{m+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m\left(\frac{ie^{-ix}}{x}\right), \quad (7)$$

$$Y_{m+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(-1)^m x^{m+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m\left(-\frac{\cos x}{x}\right). \quad (8)$$

Так как ряд для $I_{1/2}(x)$ получается из ряда для $J_{1/2}(x)$, если все члены взять с положительными знаками, то немедленно получаем

$$I_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\mathrm{sh}\,x \quad (9)$$

и из рекуррентных соотношений [**21.04** (7)]

$$x^{-n-1}I_{n+1}(x) = \frac{d}{x\,dx}[x^{-n}I_n(x)], \quad (10)$$

откуда

$$I_{m+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}x^{m+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}. \quad (11)$$

Кроме того,

$$\mathrm{Kh}_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}e^{-x}, \quad (12)$$

$$\mathrm{Kh}_{m+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(-1)^m x^{m+1/2}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m\frac{e^{-x}}{x}. \quad (13)$$

21.09. Функции ber, bei, kher, khei [5—7]. Эти функции определяются следующим образом:

$$\mathrm{ber}_n(x) \pm i\,\mathrm{bei}_n(x) = J_n(xe^{\pm 3/4\pi i}) = e^{\pm 1/2 n\pi i} I_n(xe^{\pm 1/4\pi i}),$$

$$\mathrm{kher}_n(x) \pm i\,\mathrm{khei}_n(x) = e^{\pm 1/2 n\pi i}\,\mathrm{Kh}_n(xe^{\pm 1/4\pi i}) = i\,\mathrm{Hs}_n(xe^{\pm 3/4\pi i}).$$

Они, в частности, встречаются в задачах о периодическом тепловом потоке и медленном периодическом движении вязкой жидкости при наличии цилиндрических границ. Функции $\mathrm{kher}_n(x)$ и $\mathrm{khei}_n(x)$ равны табулированным функциям $\mathrm{ker}_n(x)$, $\mathrm{kei}_n(x)$, умноженным на $2/\pi$. Свойства этих функций легко вывести из свойств функций $I_n(x)$ и $\mathrm{Kh}_n(x)$ при комплексном аргументе.

Если $|x|$ мало, то

$$\mathrm{Kh}_0(x) \doteqdot -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}x\right),$$

откуда

$$\mathrm{kher}_0(x) \doteqdot -\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{2}(x), \quad \mathrm{khei}_0(x) \doteqdot \begin{cases} \frac{1}{2} & (x<0), \\ -\frac{1}{2} & (x>0). \end{cases}$$

Если $p^{-1}f(t)$ обозначает $\int_0^t f(t)\,dt$, то

$$p^{-n}e^{i/p}H(t) = t^{1/2 n}e^{-3/2 n\pi i}\left(\mathrm{ber}_n 2\sqrt{t} + i\,\mathrm{bei}_n 2\sqrt{t}\right)H(t).$$

21.10. Ряды и определенные интегралы. Из интегралов Шлефли и теоремы Лорана сразу следует, что если n целое, положительное или отрицательное, то $J_n(x)$ есть коэффициент при λ^n разложения $\exp\frac{1}{2}x\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$ по положительным и отрицательным степеням λ. Это можно легко показать непосредственным перемножением рядов. По этой причине функции Бесселя целого порядка часто называют *коэффициентами Бесселя*. Поэтому имеем

$$\exp\frac{1}{2}x\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,\lambda^n \tag{1}$$

без ограничений на x и λ. Положим $\lambda = \exp i\theta$. Тогда

$$\exp(ix\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,e^{ni\theta}. \tag{2}$$

Умножим на $\exp(-in\theta)$ и проинтегрируем от $-\pi$ до π; тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp i(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta = 2\pi J_n(x) \tag{3}$$

и

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta, \tag{4}$$

что представляет собой частный случай результата для произвольного n.

Если $n=0$, то в (4) можно θ заменить на $\theta - \frac{1}{2}\pi$ и

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix\cos\theta)\,d\theta. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ibx\sin\theta)\,d\theta \tag{6}$$

($a>0$; a, b действительные).

Проинтегрируем сначала по x, тогда

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a - ib\sin\theta} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\theta}\,d\theta}{ae^{i\theta} - \frac{1}{2}be^{2i\theta} + \frac{1}{2}b} =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int \frac{dz}{bz^2 - 2az - b}, \tag{7}$$

где последний интеграл берется по единичной окружности. Полюсы подынтегрального выражения расположены в точках

$$bz = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

При действительных a и b они действительны, причем один расположен внутри, а другой — вне круга. Тогда интеграл равен $(a^2+b^2)^{-1/2}$. Изменяя обозначения, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-\varkappa z}J_0(\varkappa\bar{\omega})\,d\varkappa = \frac{1}{(\bar{\omega}^2 + z^2)^{1/2}}, \tag{8}$$

z, $\bar{\omega}$ действительны при $z>0$. Можно рассматривать $\bar{\omega}$ и z как цилиндрические координаты. Тогда правая часть есть просто r^{-1}, и мы выразили фундаментальное решение уравнения Лапласа

через решения уравнения в цилиндрических координатах. Это справедливо при $z>0$. При $z<0$ показатель экспоненты, очевидно, нужно взять равным $+\varkappa z$.

Теперь следует ожидать, что решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах $(\bar\omega, \lambda, z)$ можно выразить в другом виде. В самом деле, если $\bar\omega$ и λ считать постоянными, то решение φ можно выразить через $\cos\alpha z$ и $\sin\alpha z$, как интегралы Фурье $\int f(\alpha, \bar\omega, \lambda)\cos\alpha z\, d\alpha + \int g(\alpha, \bar\omega, \lambda)\sin\alpha z\, d\alpha$ при условии, что они сходятся, и то же самое применимо к $\nabla^2\varphi$. Но если $\nabla^2\varphi = 0$ для всех z, то f и g должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\bar\omega}\frac{\partial}{\partial\bar\omega}\left(\bar\omega\frac{\partial f}{\partial\bar\omega}\right)+\frac{1}{\bar\omega^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}-\alpha^2 f=0$$

и поэтому иметь вид $[AI_n(\alpha\bar\omega)+B\,\mathrm{Kh}_n(\alpha\bar\omega)](\cos n\lambda, \sin n\lambda)$. Такое выражение имеет очевидный недостаток, заключающийся в том, что $I_n(\alpha\bar\omega)\to\infty$ при $\bar\omega\to\infty$, а $\mathrm{Kh}_n(\alpha\bar\omega)\to\infty$ при $\bar\omega\to 0$. Однако для распределения с особенностью при $\bar\omega=0$, стремящегося к 0 на бесконечности, можно ожидать, что решение Kh_n является допустимым. Оно может быть получено следующим образом. Можно рассматривать эту задачу как задачу о распределении потенциала от источников вдоль оси z с линейной плотностью, пропорциональной $\cos\alpha z$. Тогда потенциал такого распределения при $z=0$ будет

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\bar\omega^2}}\,d\zeta = 2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\alpha\zeta}}{\sqrt{\zeta^2+\bar\omega^2}}\,d\zeta = 2\,\mathrm{Re}\int_0^{i\infty}\frac{e^{i\alpha\zeta}}{\sqrt{\zeta^2+\bar\omega^2}} \qquad (9)$$

с обходом полюса при $\zeta=i\bar\omega$. Положим $\zeta=i\varkappa$ и затем $\varkappa=\bar\omega\,\mathrm{ch}\,v$. Тогда с учетом того, что интеграл до $\varkappa=\bar\omega$ является чисто мнимым, имеем в силу **21.022**(59)

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}e^{-\alpha\varkappa}\frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-\bar\omega^2}} = 2\int_{\bar\omega}^{\infty}e^{-\alpha\varkappa}\frac{d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-\bar\omega^2}} =$$

$$= 2\int_0^{\infty}e^{-\alpha\bar\omega\,\mathrm{ch}\,v}dv = \pi\,\mathrm{Kh}_0(\alpha\bar\omega). \qquad (10)$$

В свою очередь потенциал вблизи оси должен быть равен произведению линейной плотности на $-2\ln\bar\omega$. Но при малых $\bar\omega$ функция $\mathrm{Kh}_0(\alpha\bar\omega)$ ведет себя как $-\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha\bar\omega\right)$, и поэтому $\pi\,\mathrm{Kh}_0(\alpha\bar\omega)\cos\alpha\zeta$ будет вести себя как $-2\ln\bar\omega\cos\alpha\zeta$. Тогда потенциал от линейной плотности $\cos\alpha z$ будет

$$\pi\,\mathrm{Kh}_0(\alpha\bar\omega)\cos\alpha z.$$

Возьмем теперь плотность равной $^1/_2 h$ на отрезке от $z=-h$ до $z=h$, а в остальной части равной нулю. Тогда мы можем выразить это как интеграл Фурье $\int_0^\infty f(\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha$, причем

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi h}\int_{-h}^{h}\cos\alpha\zeta\,d\zeta=\frac{1}{\pi\alpha h}\sin\alpha h. \tag{11}$$

Следовательно, (11) есть множитель при $\cos\alpha z$ в выражении, соответствующем линейной плотности, равномерной при $-h<z<h$, и предельная функция равна $1/\pi$, когда h мало и распределение сводится к сосредоточенной единичной массе или заряду. Тогда имеем

$$\frac{1}{r}=\int_0^\infty \mathrm{Kh}_0(\alpha\bar{\omega})\cos\alpha z\,d\alpha \quad (\bar{\omega}>0). \tag{12}$$

Интеграл сходится на обоих пределах, за исключением случая, когда $\bar{\omega}=0$.

Поучительно видеть, как совершенно различные на вид выражения (8) и (12) можно связать между собой непосредственно. Исходим из (8), записав его в виде

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\varkappa z}\left[\mathrm{Hs}_0(\varkappa\bar{\omega})+\mathrm{Hi}_0(\varkappa\bar{\omega})\right]d\varkappa. \tag{13}$$

Каждую часть этого выражения нужно рассматривать отдельно, так как $\mathrm{Hs}_0(x)\to 0$ при $x\to i\infty$, а $\mathrm{Hi}_0(x)\to 0$ при $x\to -i\infty$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}&=\frac{1}{2}\int_0^{i\infty} e^{-\varkappa z}\,\mathrm{Hs}_0(\varkappa\bar{\omega})\,d\varkappa+\frac{1}{2}\int_0^{-i\infty} e^{-\varkappa z}\,\mathrm{Hi}_0(\varkappa\bar{\omega})\,d\varkappa=\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-i\alpha z}i\,\mathrm{Hs}_0(i\alpha\bar{\omega})\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\alpha z}i\,\mathrm{Hi}_0(-i\alpha\bar{\omega})\,d\alpha=\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-i\alpha z}\,\mathrm{Kh}_0(\alpha\bar{\omega})\,d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\alpha z}\,\mathrm{Kh}_0(\alpha\bar{\omega})\,d\alpha=\\&=\int_0^\infty \mathrm{Kh}_0(\alpha\bar{\omega})\cos\alpha z\,d\alpha,\end{aligned} \tag{14}$$

где использованы соотношения **21.022**(67) между Kh_0 и функциями Ханкеля. Такой тип преобразования часто используется

при рассмотрении волн около плоских границ, и мы проиллюстрировали его на самом простом примере. Небольшое изменение этого метода для сферических границ лежит в основе многих работ по распространению электромагнитных волн около шара.

21.101. Интеграл Фурье — Бесселя. При таких же условиях, как в интегральной теореме Фурье, функция точки над плоскостью может быть выражена через функции Бесселя. Если $\varphi(\rho, \chi)$ есть потенциал в точке Q, цилиндрические координаты которой суть $(\rho, \chi, 0)$, а координаты точки $P-(\bar{\omega}, \lambda, z)$, где $z>0$, то

$$\varphi_P = \frac{1}{2\pi}\int\int \varphi(\rho, \chi)\frac{z}{R^3}\,dS = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int \varphi(\rho, \chi)\frac{dS}{R} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\partial z}\int\int\int_0^\infty \varphi(\rho, \chi)\, e^{-\varkappa z} J_0(\varkappa q)\, dS\, d\varkappa, \qquad (1)$$

где q — проекция QP на плоскость $z=0$, и поэтому

$$q^2 = \rho^2 + \bar{\omega}^2 - 2\rho\bar{\omega}\cos(\chi - \lambda). \qquad (2)$$

Мы хотим иметь выражение через типичные решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах $e^{-\varkappa z}J_n(\varkappa\bar{\omega})(\cos n\lambda, \sin n\lambda)$. Получить такое представление $J_0(\varkappa q)$ оказывается неожиданно трудно. По-видимому, оно впервые было найдено Нейманом и и Гейне как предельный случай соответствующих результатов в сферических координатах. Искомое разложение имеет вид

$$J_0(\varkappa q) = J_0(\varkappa\bar{\omega})\, J_0(\varkappa\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(\varkappa\bar{\omega})\, J_n(\varkappa\rho)\cos n(\chi - \lambda). \qquad (3)$$

Чтобы проверить это выражение, подставим для функций Бесселя интегралы Шлефли и выберем пути интегрирования так, чтобы переменные интегрирования имели модули больше 1 во всех точках путей. Тогда

$$J_n(\varkappa\bar{\omega})\, J_n(\varkappa\rho)\cos n(\chi - \lambda) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_M e^{\frac{1}{2}\varkappa\bar{\omega}(\alpha - 1/\alpha)}\frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}}\int_M e^{\frac{1}{2}\varkappa\rho(\beta - 1/\beta)}\frac{d\beta}{\beta^{n+1}}\cos n(\chi - \lambda) \qquad (4)$$

и

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\chi - \lambda)}{\alpha^n\beta^n} = \frac{\alpha^2\beta^2 - 1}{\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta\cos(\chi - \lambda) + 1}. \qquad (5)$$

Тогда ряд равен

$$S = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_M\int\limits_M \exp\frac{1}{2}\left[\varkappa\bar{\omega}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\varkappa\rho\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\alpha^2\beta^2-1}{\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta\cos(\chi-\lambda)+1}\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha\beta}, \qquad (6)$$

и так как подынтегральное выражение однозначно, мы можем заменить пути интегрирования любыми замкнутыми контурами, такими, что $|\alpha|>1$, $|\beta|>1$. Запишем

$$\chi-\lambda=\vartheta, \quad \alpha=\frac{\sigma}{\beta}, \qquad (7)$$

где $|\sigma|=|\alpha\beta|>1$. Тогда показатель экспоненты равен

$$\frac{1}{2}\varkappa\left[\bar{\omega}\left(\frac{\sigma}{\beta}-\frac{\beta}{\sigma}\right)+\rho\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)\right]=\frac{1}{2}\varkappa\left[\left(\rho-\frac{\bar{\omega}}{\sigma}\right)\beta-(\rho-\bar{\omega}\sigma)\frac{1}{\beta}\right]=$$

$$=\frac{1}{1}\varkappa\left[\rho^2-\rho\bar{\omega}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)+\bar{\omega}^2\right]^{1/2}\left[\left(\frac{\rho-\bar{\omega}/\sigma}{\rho-\bar{\omega}\sigma}\right)^{1/2}\beta-\left(\frac{\rho-\bar{\omega}\sigma}{\rho-\bar{\omega}/\sigma}\right)^{1/2}\frac{1}{\beta}\right]=\psi \qquad (8)$$

и

$$S=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_C\int\limits_C(\exp\psi)\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2-2\sigma\cos\vartheta+1}\frac{d\sigma\,d\beta}{\sigma\beta}. \qquad (9)$$

Теперь можно проинтегрировать по β, что дает

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C J_0\left\{\varkappa\left[\rho^2-\rho\bar{\omega}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)+\bar{\omega}^2\right]^{1/2}\right\}\frac{\sigma-\frac{1}{\sigma}}{\sigma-2\cos\vartheta+\frac{1}{\sigma}}\frac{d\sigma}{\sigma}. \qquad (10)$$

В качестве пути интегрирования можно взять любую окружность радиуса больше 1, так чтобы она охватывала полюсы при $\sigma=\exp(\pm i\vartheta)$. Теперь если положить $\sigma=1/\sigma'$ и исследовать изменения знака, то вид этого интеграла не изменится, а новый путь интегрирования будет окружность c радиуса меньше 1, которая обходится в отрицательном направлении. Таким образом, мы имеем также, проходя теперь C в положительном направлении,

$$S=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C J_0\left\{\varkappa\left[\rho^2-\rho\bar{\omega}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)+\bar{\omega}^2\right]^{1/2}\right\}\frac{\sigma-\frac{1}{\sigma}}{\sigma-2\cos\vartheta+\frac{1}{\sigma}}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (11)$$

и после сложения получаем $2S$ просто в виде суммы вычетов в двух полюсах. Она вычисляется немедленно и дает

$$S=J_0\left[\varkappa(\rho^2-2\bar{\omega}\rho\cos\vartheta+\bar{\omega}^2)^{1/2}\right]=J_0(\varkappa q), \qquad (12)$$

что и нужно было показать. Следовательно,

$$\varphi_P = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int\int \varphi(\rho, \chi)\, e^{-\varkappa z} \times$$

$$\times \left[J_0(\varkappa\bar{\omega})\, J_0(\varkappa\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(\varkappa\bar{\omega})\, J_n(\varkappa\rho)\cos n(\chi-\lambda)\right]\rho d\,\rho d\,\chi\, d\varkappa. \quad (13)$$

Дифференцирование по z можно внести под знак интеграла, и мы получим требуемое разложение. Перемена порядков суммирования и интегрирования допустима при условиях такого же типа, как в интегральной теореме Фурье (конечно, для случая двух измерений). Доказательство сходимости предельного интеграла по поверхности получается сразу, если положить $z = 0$, но требует дополнительных условий, как и для теорем Фурье; если он сходится, то равен $\varphi(\bar{\omega}, \lambda, 0)$. Таким образом, получаем разложение

$$\varphi(\bar{\omega}, \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \varphi(\rho, \chi)\, J_0(\varkappa\bar{\omega})\, J_0(\varkappa\rho)\,\varkappa\rho\, d\rho\, d\chi\, d\varkappa +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \varphi(\rho, \chi)\, J_n(\varkappa\bar{\omega})\, J_n(\varkappa\rho)\cos n(\chi-\lambda)\,\varkappa\rho\, d\rho\, d\chi\, d\varkappa, \quad (14)$$

называемое интегралом Фурье — Бесселя. Следует отметить, что, когда ρ велико, $J_n(\varkappa\rho)$ порядка $\rho^{-1/2}$ и для абсолютной сходимости интегралов нужно, чтобы $\varphi(\rho, \chi) \to 0$ быстрее $\rho^{-3/2}$.

21.102. Разложение между концентрическими окружностями. Если u и v — функции x, удовлетворяющие уравнениям

$$x^2u'' + xu' + (\lambda^2x^2 - l^2)\,u = 0, \quad (1)$$

$$x^2v'' + xv' + (\mu^2x^2 - m^2)\,v = 0, \quad (2)$$

то после умножения на v/x и u/x соответственно и вычитания получим

$$x(u''v - uv'') + (u'v - uv') + \left[(\lambda^2 - \mu^2)\,x - \frac{l^2 - m^2}{x}\right]uv = 0. \quad (3)$$

Интегрируя, имеем

$$\int\left[(\lambda^2 - \mu^2)\,x - \frac{l^2 - m^2}{x}\right]uv\,dx = -\,[x(u'v - uv')]. \quad (4)$$

Граничные условия обычно таковы, что члены в правой части обращаются в нуль. Тогда если $\lambda = \mu$, $l \neq m$, то

$$\int uv\frac{dx}{x} = 0, \quad (5)$$

а если $\lambda \neq \mu$, $l = m$, то

$$\int xuv\,dx = 0, \tag{6}$$

где пределы интегрирования являются любыми значениями x, при которых правая часть (4) обращается в нуль. В частности, если пределы для x равны 0 и a, а λ и μ — два различных числа, таких, что

$$J_m(\lambda a) = J_m(\mu a) = 0 \quad \text{или} \quad J'_m(\lambda a) = J'_m(\mu a) = 0,$$

то

$$\int_0^a xJ_m(\lambda x)\,J_m(\mu x)\,dx = 0. \tag{7}$$

Этого следовало ожидать, если вспомнить общие условия ортогональности, вытекающие из теоремы Грина. Для определения коэффициентов разложения заданной функции нам необходим также интеграл от xv^2, где v — какое-либо решение уравнения (2). Умножая это уравнение на v', имеем

$$0 = x^2v'v'' + xv'^2 + (\mu^2x^2 - m^2)\,vv' =$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2v'^2 + \frac{1}{2}(\mu^2x^2 - m^2)\,v^2\right] - \mu^2xv^2,$$

и поэтому в любых пределах

$$\int xv^2\,dx = \frac{1}{2\mu^2}\left[x^2v'^2 + (\mu^2x^2 - m^2)\,v^2\right]. \tag{8}$$

ПРИМЕРЫ

1. Если

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + nx\frac{dy}{dx} + (b + cx^{2m})\,y = 0$$

и

$$\xi = x^m, \quad y = x^{-\frac{1}{2}(n-1)}\eta,$$

докажите, что

$$\eta = AJ_\mu\left(\frac{c^{1/2}\xi}{m}\right) + BJ_{-\mu}\left(\frac{c^{1/2}\xi}{m}\right),$$

где

$$\mu^2m^2 = \frac{1}{4}(n-1)^2 - b. \tag{Ломмель}$$

2. Если

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{2m-2}y,$$

докажите, что

$$y = x^{1/2}\left[AI_{\frac{1}{2m}}\left(\frac{x^m}{m}\right) + BI_{-\frac{1}{2m}}\left(\frac{x^m}{m}\right)\right],$$

и покажите отсюда, что интеграл Эйри пропорционален $x^{1/2}\,\mathrm{Kh}_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$.

(Никольсен)

3. Выразите $\mathrm{Bi}\,(x)$ через функции Бесселя порядка $\pm\frac{1}{3}$. (Миллер)

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathematical Tables and other Aids to Computation, v. 1, 1944, p. 207—308.
2. *Watson G. N.*, Theory of Bessel Functions, 1945, p. 209. (Русский перевод: *Ватсон Г. Н.*, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949.)
3. *Lamb H.*, Hydrodynamics, 1932. (Русский перевод: *Ламб Г.*, Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.)
4. *Bickley W. G.*, Phil. Mag. (7) **34**, 37—49 (1943).
5. *Russel A.*, Phil. Mag. (6) **17**, 524—552 (1909).
6. *Whitehead C. S.*, Quart. J. Math. **42**, 316—342 (1911).
7. *Savidge H. G.*, Phil. Mag. (6) **19**, 49—58 (1910).

Глава 22

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

22.01. Большинство приложений функций Бесселя относится к колебаниям систем, обладающих осевой симметрией. Обычно координата z изменяется мало, как в случае приливных колебаний воды в круглом бассейне, или искомая функция не зависит от z. Даже в случаях, когда зависимость от z существенна, функции Бесселя дают наилучший метод решения, если границы представляют собой плоскости постоянных z. В задачах о колебаниях областей со сферическими границами появляются функции Бесселя полуцелого порядка в комбинации с функциями Лежандра. Они встречаются также в различных одномерных задачах, особенно в задачах о колебаниях невесомой струны, нагруженной через равные интервалы тяжелыми частицами, и о распространении электрических волн по подводному кабелю.

22.02. Цилиндрический импульс. Рассмотрим задачу о взрыве из **19.08** с тем изменением, что прежнее избыточное давление P_0 возникает не внутри сферы, а внутри цилиндра радиуса a. При аналогичных начальных условиях вспомогательное уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{\bar{\omega}}\frac{\partial}{\partial\bar{\omega}}\left(\bar{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\omega}}\right)-\frac{p^2}{c^2}\varphi=\begin{cases}\dfrac{P_0 p}{\rho c^2} & (\bar{\omega}<a),\\ 0 & (\bar{\omega}>a).\end{cases} \tag{1}$$

Решениями соответствующего однородного уравнения являются функции Бесселя нулевого порядка: $I_0(p\bar{\omega}/c)$ и $\mathrm{Kh}_0(p\bar{\omega}/c)$. Вторая функция непригодна внутри цилиндра, так как она обращается в бесконечность при $\bar{\omega}=0$. Первая из них непригодна вне цилиндра. Действительно, при интерпретации операционного решения интегрирование производится по значениям z, имеющим положительную действительную часть, и асимптотическое разложение $I_0(z\bar{\omega}/c)$ при больших $\bar{\omega}$ содержит множителем $\exp(z\bar{\omega}/c)$. Поэтому это решение давало бы сходящийся импульс.

Следовательно, решение уравнения (1) нужно взять в виде

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{P_0}{\rho p} + AI_0\left(\frac{p\bar{\omega}}{c}\right) & (0 \leqslant \bar{\omega} \leqslant a), \\ B\,\mathrm{Kh}_0\left(\frac{p\bar{\omega}}{c}\right) & (a \leqslant \bar{\omega}). \end{cases} \tag{2}$$

Кроме того, $\partial\varphi/\partial t$ и $\partial\varphi/\partial\bar{\omega}$ должны быть непрерывны при $\bar{\omega} = a$. Отсюда

$$AI_0\left(\frac{pa}{c}\right) - \frac{P_0}{\rho p} = B\,\mathrm{Kh}_0\left(\frac{pa}{c}\right), \tag{3}$$

$$AI_0'\left(\frac{pa}{c}\right) = B\,\mathrm{Kh}_0'\left(\frac{pa}{c}\right). \tag{4}$$

Из **21.07** (6) имеем тождество

$$I_0'(x)\,\mathrm{Kh}_0(x) - I_0(x)\,\mathrm{Kh}_0'(x) = 2/\pi x. \tag{5}$$

Отсюда при $\bar{\omega} \geqslant a$ получаем

$$\frac{\rho\varphi}{P_0} = -\frac{\pi}{2}\frac{a}{c} I_0'\left(\frac{pa}{c}\right)\mathrm{Kh}_0\left(\frac{p\bar{\omega}}{c}\right). \tag{6}$$

Но

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(x\cos\theta)\,d\theta, \tag{7}$$

$$\mathrm{Kh}_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-x\,\mathrm{ch}\,v)\,dv, \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\frac{\rho\varphi}{P_0} = -\frac{1}{\pi}\frac{a}{c}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \cos\theta \exp\left(\frac{pa}{c}\cos\theta - \frac{p\bar{\omega}}{c}\,\mathrm{ch}\,v\right)d\theta\,dv =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{a}{c}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \cos\theta\, H\left(t + \frac{a}{c}\cos\theta - \frac{\bar{\omega}}{c}\,\mathrm{ch}\,v\right)d\theta\,dv. \tag{9}$$

Поскольку

$$t + \frac{a}{c}\cos\theta - \frac{\bar{\omega}}{c}\,\mathrm{ch}\,v \leqslant t + \frac{a}{c} - \frac{\bar{\omega}}{c}, \tag{10}$$

φ обращается в нуль при $t \leqslant \frac{\bar{\omega} - a}{c}$, и если интегрировать сначала по v, можно заменить верхний предел интегрирования на $\mathrm{Arch}\frac{ct + a\cos\theta}{\omega}$, а единичную функцию — на единицу при условии, что $ct + a\cos\theta > \bar{\omega}$. Это условие выполняется по крайней мере при $\theta = 0$, если только $ct > \bar{\omega} - a$. Отсюда

$$\frac{\rho\varphi}{P_0} = -\frac{a}{\pi c}\int_0^{} \cos\theta\,\mathrm{Arch}\left(\frac{ct + a\cos\theta}{\bar{\omega}}\right)d\theta \qquad (ct > \bar{\omega} - a). \tag{11}$$

Если $ct > \bar{\omega} + a$, то $(ct + a\cos\theta)/\bar{\omega} > 1$ для всех θ, и верхний предел интегрирования равен π. Если $\bar{\omega} - a < ct < \bar{\omega} + a$, то верхний предел будет равен $\arccos \frac{\bar{\omega} - ct}{a}$. Поэтому возмущение можно разбить на три стадии, определяемые неравенствами $ct < \bar{\omega} - a$, $\bar{\omega} - a < ct < \bar{\omega} + a$ и $\bar{\omega} + a < ct$. На первой стадии $\varphi = 0$, и мы получаем цилиндрический импульс, распространяющийся со скоростью c.

Основной интерес представляет для нас давление, которое выражается в виде

$$\frac{P}{P_0} = \frac{a}{\pi} \int_0 \frac{\cos\theta\, d\theta}{[(ct + a\cos\theta)^2 - \bar{\omega}^2]^{1/2}}. \tag{12}$$

Положим при $\bar{\omega} - a < ct < \bar{\omega} + a$

$$ct + a - \bar{\omega} = 2b, \qquad ct + a\cos\theta - \bar{\omega} = 2b\cos^2\psi \tag{13}$$

и будем считать b малым. Тогда сразу после момента вступления импульса имеем

$$\frac{P}{P_0} \doteqdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\bar{\omega}}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{b}{a} - \frac{1}{4}\frac{b}{\omega}\right). \tag{14}$$

Скачок давления на фронте импульса равен поэтому $\frac{1}{2}P_0\sqrt{a/\bar{\omega}}$, тогда как в одномерном случае он равен $\frac{1}{2}P_0$, а в трехмерном случае $\frac{1}{2}P_0(a/\bar{\omega})$. Убывание давления со временем оказывается сначала сравнительно более медленным, чем в трехмерном случае, и при $ct = \bar{\omega}$ давление остается все еще положительным. Однако оно стремится к $-\infty$ при $ct = \bar{\omega} + a$ и возвращается к конечному отрицательному значению при больших t. Приближенное значение при $ct = \bar{\omega} + a$ равно [1]

$$\frac{P}{P_0} \doteqdot -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{\bar{\omega}}}\left(\ln\frac{32a}{|\bar{\omega} + a - ct|} - 4\right), \tag{15}$$

а при больших по сравнению с a значениях $ct - \bar{\omega}$ оно равно

$$\frac{P}{P_0} = -\frac{1}{2}\frac{a^2 ct}{(a^2t^2 - \bar{\omega}^2)^{3/2}}. \tag{16}$$

Этот бесконечный импульс давления не несет бесконечной энергии, так как бесконечность здесь только логарифмическая. Кроме того, выражение для импульса должно, во всяком случае, измениться при учете членов второго порядка в уравнениях гидродинамики. Мгновенное нагружение всей поверхности бесконечного цилиндра было бы трудно осуществить физически, но приближение к этому случаю возможно, если внутренность

цилиндра заполнена взрывчатым веществом, скорость волны детонации в котором в несколько раз превышает скорость звука в холодном воздухе. Бесконечный „хвост" возмущения характерен для распространения волн в двух измерениях. Он возникает также в случае точечного источника между двумя параллельными пластинками и при формировании упругих волн в твердом теле [2]. В последнем случае благодаря дифракции на границе тела возникают поверхностные волны, распространяющиеся в двух измерениях, так что каждая частица только асимптотически возвращается к исходному положению, несмотря на то что начальное возмущение имеет конечную протяженность во всех трех направлениях.

22.03. Невесомая струна с сосредоточенными массами. Мы видели, что операционный метод всегда применим при решении соответствующим образом заданных конечных систем линейных уравнений и не требует использования интеграла Бромвича. Мы предполагали, что непрерывные системы физически лучше всего рассматривать как получающиеся из дискретных систем посредством предельного перехода, и решения для них являются пределами решений для дискретных систем. Поэтому желательно иметь конкретный пример, который показывал бы, каким образом оператор типа, возникающего для непрерывных систем, может быть получен как предел последовательности операторов, применимых к дискретным системам. Один такой пример представляет однородная струна, растягиваемая натяжением $P=\rho c^2$ и имеющая массу ρ на единицу длины. Если заменить ее невесомой струной под натяжением P с тяжелыми частицами массы ρl, расположенными на расстояниях l, то мы получим дискретную систему с такой же средней массой на единицу длины и можем приближаться к однородной струне как к пределу, делая l бесконечно малым. Уравнение движения произвольной частицы есть

$$\ddot{y}_r = -\frac{c^2}{l^2}(2y_r - y_{r-1} - y_{r+1}). \tag{1}$$

Если положить $x=rl$ и перейти к пределу $l\to 0$, это уравнение превращается в

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Положим, что система начинает движение из состояния покоя, причем частица с $r=m$ закреплена, а y_0 должно изменяться заданным образом. Тогда вспомогательные уравнения будут иметь вид

$$\left(p^2+\frac{2c^2}{l^2}\right)y_r = \frac{c^2}{l^2}(y_{r-1}+y_{r+1}) \qquad (0<r<m), \tag{3}$$

Формальное решение этих уравнений получим, полагая

$$y_r = Ae^{r\lambda}. \tag{4}$$

Тогда

$$\frac{p^2l^2}{c^2} + \mathfrak{R} = e^{-\lambda} + e^{\lambda} = 2\operatorname{ch}\lambda, \tag{5}$$

и при действительном p имеется два равных по величине и противоположных по знаку действительных значения λ.

Уравнение (5) удовлетворяется при

$$\operatorname{sh}\frac{1}{2}\lambda = \frac{pl}{2c}; \tag{6}$$

если теперь выбрать положительный корень и положить

$$y_r = \frac{\operatorname{sh}(m-r)\lambda}{\operatorname{sh} m\lambda}\, y_0, \tag{7}$$

то все условия будут удовлетворены. Но $\operatorname{sh} s\lambda/\operatorname{sh}\lambda$ является полиномом от $\operatorname{sh}\frac{1}{2}\lambda$ степени $2(s-1)$. Поэтому оператор в (7) представляет собой рациональную функцию от p, причем его разложение по убывающим степеням p начинается с $(c/lp)^{2r}$. Отсюда следует, что чем дальше от возмущенного конца находится частица, тем более плавно она начинает двигаться. Однако можно получить разложение и по степеням $e^{-\lambda}$ в виде

$$\frac{\operatorname{sh}(m-r)\lambda}{\operatorname{sh} m\lambda} = e^{-r\lambda}\left(1 - e^{-2(m-r)\lambda}\right)\left(1 + e^{-2m\lambda} + e^{-4m\lambda} + \ldots\right). \tag{8}$$

Действительно, если заменить p на z, а λ на ζ, причем $\operatorname{Re} z > 0$, то и $\operatorname{Re}\zeta > 0$, так что $|e^{-\zeta}| < 1$. Тогда первый член разложения y_r будет

$$w_r = \left[\frac{pl}{2c} + \left(\frac{p^2l^2}{4c^2} + 1\right)^{1/2}\right]^{-2r} y_0. \tag{9}$$

Это выражение снова может быть разложено по отрицательным степеням p и удовлетворяет нашим основным правилам. Далее, если $lr = x$ и $l \to 0$, то этот оператор формально стремится к $e^{-px/c}$, т. е. переходит в оператор, характерный для волн в однородной струне. Предельный переход не приведет к выражению $e^{px/c}$, поскольку при изменении знака p или r получается выражение, неразложимое по отрицательным степеням p.

Однако физическая струна имеет молекулярную структуру, и нас интересует, насколько хорошо решение для однородной струны аппроксимирует решение для реальной струны. Для этой цели возьмем $y_0 = H(t)$ и посмотрим, будет ли $w_r \to H\left(t - \frac{x}{c}\right)$

при фиксированном $lr = x$ и малом l. Тогда

$$w_r = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} \left[\left(1 + \frac{z^2 l^2}{4c^2} \right)^{1/2} + \frac{zl}{2c} \right]^{-2r} \frac{dz}{z}, \tag{10}$$

и мы можем использовать метод наискорейшего спуска. Положим

$$\varphi(z) = zt - 2r \ln \left[\left(1 + \frac{z^2 l^2}{4c^2} \right)^{1/2} + \frac{zl}{2c} \right]; \tag{11}$$

тогда

$$\varphi'(z) = t - \frac{rl}{c\sqrt{1 + z^2 l^2/4c^2}}, \tag{12}$$

$$\varphi''(z) = \frac{rzl^3}{4c^3 (1 + z^2 l^2/4c^2)^{3/2}}. \tag{13}$$

Если $rl = x$, $x/ct = \xi$, то седловые точки суть $z = \pm (2c/l)(\xi^2 - 1)^{1/2}$ и расположены, следовательно, на действительной или мнимой оси при ξ, большем или меньшем единицы соответственно.

При $\xi > 1$ находим, что

$$w_r \sim \frac{1}{2} \left(\frac{l}{\pi ct} \right)^{1/2} \frac{\xi}{(\xi^2 - 1)^{3/4}} \exp \left\{ - \frac{2ct}{l} \left[\xi \operatorname{Arch} \xi - (\xi^2 - 1)^{1/2} \right] \right\} \tag{14}$$

и экспоненциально стремится к нулю при заданном ξ и $l \to 0$. Если $\xi - 1$ мало, положим $\xi = \operatorname{ch} u$, $v = ctu^3/l$ и рассмотрим также значения ξ, при которых v велико. Находим, что при

$$v = 6, \quad w_r \doteqdot 0{,}0021 \quad \text{и} \quad \xi \doteqdot 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{vl}{ct} \right)^{2/3}.$$

Следовательно, при больших ct/l величина w_r будет пренебрежимо мала, если только x превосходит ct на величину, возрастающую с t только как $t^{1/3}$ и стремящуюся к нулю вместе с l. При $l = 10^{-8}$ *см*, $ct = 10$ *см*, $v = 6$ получим $\xi - 1 \doteqdot 1{,}7 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, при обычных значениях параметров движение становится пренебрежимо малым на столь малых расстояниях впереди идеального импульса, что непрерывная система дает весьма хорошее приближение, уточнять которое не потребуется ни в каком случае.

При $x < ct$ линии наискорейшего спуска, проходящие через седловые точки, начинаются и заканчиваются в $-\infty$. Очевидно, что мы не можем приближаться к $+\infty$, так как там подынтегральное выражение стремится к бесконечности. Следовательно, пути наискорейшего спуска вместе не эквивалентны пути L, так как между ними лежит полюс $z = 0$. Поэтому нужно

добавить петлю из $-\infty$ вокруг начала координат, что дает вклад в w_r, равный единице. Тогда при $x<ct$ находим

$$w_r \sim 1-\left(\frac{l}{\pi ct}\right)^{1/2}\frac{\xi}{(1-\xi^2)^{3/4}}\cos\left\{\frac{2ct}{l}\left[(1-\xi^2)^{1/2}-\xi\arccos\xi\right]+\frac{1}{4}\pi\right\}. \quad (15)$$

При $l\to 0$ это выражение стремится к единице, как и следовало ожидать. Однако поправочный член стремится к нулю уже не экспоненциально, а лишь как $l^{1/2}$, причем его длина волны стремится к нулю вместе с l. Однако при $l/ct=10^{-9}$, $(1-\xi)\geqslant 5\cdot 10^{-5}$ этот член никогда не превосходит $1{,}7\cdot 10^{-2}$ и убывает при уменьшении ξ. Таким образом, резкий фронт, за которым смещение постоянно, дает хорошее приближение к истине.

Изменение фазы поправочного члена от частицы к частице мало при ξ, немного меньшем 1, но достигает π при малых ξ. Таким образом, имеется дисперсия. Возмущение можно рассматривать как содержащее всевозможные длины волн, большие или равные $2l$. Групповая скорость самых длинных волн равна c, а самых коротких — нулю. Это можно видеть, если вернуться к (10) и записать первые два сомножителя в виде $\exp i(\gamma t-\varkappa x)$, где

$$z=i\gamma, \quad rl=x, \quad \frac{\gamma l}{2c}=\sin\theta, \quad \varkappa=\frac{2\theta}{l}. \quad (16)$$

Тогда фазовая скорость равна

$$\frac{\gamma}{\varkappa}=\frac{c\sin\theta}{\theta}, \quad (17)$$

причем допустимы значения θ от 0 до $\frac{1}{2}\pi$. (Большие значения θ при x, кратном l, дали бы такое же смещение и поэтому несущественны.) Следовательно, фазовая скорость изменяется от c до $2c/\pi$, а групповая скорость равна

$$\frac{d\gamma}{d\varkappa}=c\sin\theta \quad (18)$$

и изменяется от c до 0.

Допустим теперь, что струна простирается в обе стороны от частицы, соответствующей $r=0$, и что вместо задания этой частице движения ей сообщается начальное смещение u, а затем она освобождается. Вспомогательное уравнение для этой частицы имеет вид

$$\left(p^2+\frac{2c^2}{l^2}\right)y_0-\frac{c^2}{l^2}(y_1+y_{-1})=p^2u; \quad (19)$$

для времен, достаточно малых, чтобы не успели прийти волны, отраженные от концов,

$$y_1 = y_{-1} = e^{-\lambda} y_0, \quad y_0 = \frac{pul/2c}{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda},$$
$$w_r = \frac{pul/2c}{(1 + p^2l^2/4c^2)^{1/2}} \left[\frac{pl}{2c} + \left(1 + \frac{p^2l^2}{4c^2}\right)^{1/2}\right]^{-2r}, \tag{20}$$

т. е. по **21.01** (23)

$$w_r = uJ_{2r}\left(\frac{2ct}{l}\right). \tag{21}$$

Функция Бесселя принимает наибольшее значение, когда ее аргумент несколько превосходит порядок, так что мы сразу видим, что наибольшее смещение распространяется со скоростью c, а из **21.05** (5) заключаем, что при больших по сравнению с rl значениях ct движение частиц становится колебательным, причем сдвиг фазы между соседними частицами приближается к π. Быстрое изменение фазы движения подсказывает аналогию с теплопроводностью, но в случае струны изменение фазы систематическое, тогда как существенным свойством теплопроводности являются беспорядочные изменения. При этом движения соседних частиц могут с такой же вероятностью оказаться как в фазе, так и в противофазе. Более глубокое исследование показывает, что эта аналогия нарушается и в другом отношении [3]. Если рассмотреть случайные начальные смещения и скорости, заданные для всех частиц на конечном участке струны, то оказывается, что энергия распространяется таким образом, что длина отрезка струны, содержащего заданную долю начальной энергии, возрастает пропорционально t. При теплопроводности эта длина возрастала бы как $t^{1/2}$.

Картина существенно меняется, если имеется какая-либо неоднородность в структуре самой системы. Допустим, что гармоническая волна приходит со стороны отрицательных x, но частица с номером 0 имеет массу $\rho l(1 + a)$ вместо ρl, причем a может быть мало. Тогда появится отраженная волна. Поэтому мы полагаем

$$y = \exp i(\gamma t - \varkappa x) + A \exp i(\gamma t + \varkappa x) \quad \left(\frac{x}{l} \leqslant 0\right),$$
$$y = B \exp i(\gamma t - \varkappa x) \quad \left(\frac{x}{l} \geqslant 0\right). \tag{22}$$

Тогда

$$1 + A = B. \tag{23}$$

Кроме того, уравнение движения для этой частицы имеет вид

$$\left[-(1+a)\gamma^2+\frac{2c^2}{l^2}\right]y_0=\frac{c^2}{l^2}(y_{-1}+y_{+1}), \tag{24}$$

и, подставляя (22) и (23), находим

$$B=\frac{1}{1+ia\operatorname{tg}\theta}, \tag{25}$$

где положено $\varkappa l=2\theta$.

Если θ мало, что соответствует длинным волнам, то B практически равно единице и имеет место почти полное прохождение волн. Но если θ близко к $\pi/2$, что соответствует наиболее коротким волнам, возможным в этой системе, то будет иметь место почти полное отражение даже при малом a. Таким образом, даже незначительная нерегулярность структуры практически полностью исказит хвост волны. Если возмущение возникает между двумя такими неоднородностями, то значительная доля энергии много раз отразится, прежде чем пройти через какую-то из них, а некоторое число слабых неоднородностей даст хаотическое движение, сильно напоминающее тепловое возбуждение, со слабой утечкой энергии, напоминающей теплопроводность. В реальном твердом теле мы встречаемся с трехмерным вариантом этой же задачи, причем неоднородности создаются хаотическим движением электронов (атомов и ионов) даже в кристалле или флуктуациями плотности в стекле.

22.04. Теплопроводность в сплошной среде как предел теплопроводности в дискретной системе. Совершенно бессмысленно говорить о температуре в некоторой точке, так как температура выражает среднюю энергию хаотического движения некоторого числа частиц; если мы говорим об абсолютной температуре, заданной с относительной точностью в 10^{-3}, то мы должны рассматривать что-то около 10^6 частиц. Поэтому пространственные производные температуры в строгом математическом смысле не существуют. Но если l достаточно велико, чтобы разница температур между двумя местами, расположенными на расстоянии l, была значительно больше ее неопределенности, можно превратить уравнение теплопроводности в уравнение в конечных разностях, которое для одномерного случая имеет вид

$$\frac{\partial y_r}{\partial t}=\frac{h^2}{l^2}(y_{r-1}-2y_r+y_{r+1}). \tag{1}$$

Положим $y_0=H(t)$ и решим это уравнение операционным методом. Процесс решения аналогичен тому, который применялся в начале предыдущего раздела, но p^2 заменяется на p, и мы

получаем в качестве решения для диффузии вперед следующее выражение, соответствующее (9) из **22.03**:

$$w_r = \left[\left(1+\frac{pl^2}{4h^2}\right)^{1/2}+\frac{p^{1/2}l}{2h}\right]^{-2r} = p^{-r}\left[\left(\frac{l^2}{4h^2}+\frac{1}{p}\right)^{1/2}+\frac{l}{2h}\right]^{-2r}, \qquad (2)$$

которое разлагается по степеням p^{-1}. Если l устремить к нулю при условии, что $rl \to x$, то это выражение формально стремится к $e^{-p^{1/2}x/h}$, т. е. к нашему e^{-qx}. Таким образом, мы получили этот последний оператор как предел оператора, разложимого в степенной ряд по p^{-1}. Разность $(w_1 - w_0)/l$ дает выражение для $p^{1/2}$, именно

$$p^{1/2} = h \lim_{l\to 0} \frac{1}{l}\left\{1-\left[\left(1+\frac{pl^2}{4h^2}\right)^{1/2}+\frac{p^{1/2}l}{2h}\right]^{-2}\right\}. \qquad (3)$$

Далее

$$w_r = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\left(1+\frac{zl^2}{4h^2}\right)^{1/2}+\frac{z^{1/2}l}{2h}\right]^{-2r} e^{zt}\,\frac{dz}{z}. \qquad (4)$$

По теореме Далзелла (**12.101**) можно поменять порядок интегрирования и предельного перехода. Тогда по **12.126**

$$\lim_{l\to 0} w = \frac{1}{2\pi i}\int_L \exp\left(zt-\frac{z^{1/2}x}{h}\right)\frac{dz}{z} = 1-\operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}}. \qquad (5)$$

При малом, но не равном нулю l седловая точка несколько смещается, но мы можем взять в качестве пути интегрирования путь наискорейшего спуска для интеграла в (5). На этом пути мы можем разложить подынтегральное выражение по возрастающим степеням l, поскольку основной вклад дает окрестность седловой точки и разложение имеет смысл при малых l. Тогда

$$\begin{aligned} w &\sim \frac{1}{2\pi i}\int_M \left(1+\frac{z^{3/2}xl^2}{24h^3}\right)\exp\left(zt-\frac{z^{1/2}x}{h}\right)\frac{dz}{z} = \\ &= \left(1-\frac{xl^2}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}}\right) = \\ &= \left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2ht^{1/2}}\right)-\frac{xl^2}{48h^3\sqrt{\pi t^3}}\left(1-\frac{x^2}{2h^2t}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4h^2t}\right). \end{aligned} \qquad (6)$$

При большом $x/2ht^{1/2}$ оба члена малы независимо от l. Существенны значения x порядка $2ht^{1/2}$ или меньше. При этих значениях последний член составляет долю $l^2/48h^2t$ от первого, так что им можно пренебречь при $t \gg l^2/48h^2$.

Если взять $l = 10^{-5}$ *см*, $h = 0{,}1$ CGS (значение, соответствующее плохому проводнику тепла), то критическое значение t

равно $2 \cdot 10^{-10}$ *сек*. Таким образом, расчет температуры по обычному решению для короткого времени после начального возмущения приводит к неверному результату, поскольку понятие температуры при этом не имеет смысла; но это время очень мало и тем меньше, чем лучший проводник тепла мы рассматриваем. Поэтому приближение при помощи дискретной системы оправдывает результаты, полученные путем прямого рассмотрения непрерывного случая, и снимает логические возражения против этого метода.

22.05. Трансокеанский кабель представляет собой однородный проводник с самоиндукцией, емкостью, сопротивлением и утечкой. Положим, что на расстоянии x от конца заряд на единицу длины равен y, потенциал φ и ток J. Тогда справедливы следующие уравнения:

$$y = k\varphi, \tag{1}$$

$$\frac{l dJ}{dt} + rJ = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} - s\varphi, \tag{3}$$

где l, k и r суть самоиндукция, емкость и сопротивление на единицу длины. Утечка такова, что потенциал φ вызывает ток $s\varphi$, вытекающий через изоляцию. До момента $t = 0$ величины y, J и φ равны нулю. Затем в точке $x = 0$ потенциал φ повышается до значения φ_0, возможно, зависящего от времени. Тогда вспомогательные уравнения принимают вид

$$(lp + r) J = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (kp + s)\varphi = -\frac{\partial J}{\partial x}. \tag{4}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (lp + r)(kp + s)\varphi. \tag{5}$$

Положим

$$(lp + r)(kp + s) = q^2 = lk[(p + \rho)^2 - \sigma^2]. \tag{6}$$

Тогда, если пренебречь отражением от дальнего конца, операционное решение получается в виде

$$\varphi = e^{-qx}\varphi_0. \tag{7}$$

Если самоиндукция и утечка пренебрежимо малы, то имеем $l = 0$, $s = 0$, $q^2 = krp$. Тогда это решение имеет такой же вид, как и в случае теплопроводности. Это условие выполняется для обычных телеграфных линий. В этом случае, если $\varphi_0 = H(t)$, то

$$\varphi = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2}\left(\frac{kr}{t}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

При фиксированном x и больших t потенциал $\varphi \to 1$ и тем быстрее, чем меньше kr. Для достаточно коротких линий соответствующее время достаточно мало, чтобы последовательные сигналы передавались, не накладываясь друг на друга. Но для длинных линий и особенно для трансокеанских кабелей время, необходимое для достижения потенциалом на приемном конце требуемой величины, оказывается достаточно большим, чтобы вызвать серьезные помехи за счет наложения сигналов при практически осуществимой скорости передачи. Для уменьшения kr требуются более толстые проводники, что влечет за собой недопустимые затраты. Предложенное Хевисайдом усовершенствование было вынужденной попыткой ввести самоиндукцию и утечку, гораздо большие, чем для простого кабеля. Основание для увеличения самоиндукции можно усмотреть из грубой аналогии с полетом снаряда в воздухе. Если снаряд имеет пренебрежимо малую массу, то сопротивление воздуха быстро гасит скорость, и он не может улететь далеко. Но более тяжелый снаряд, хотя ему и труднее сообщить такую же начальную скорость, лучше сохраняет скорость и летит дальше. Самоиндукция действует в значительной степени так же, как инерция. Влияние утечки, которое мы сейчас выясним, менее очевидно.

Положим

$$lk = \frac{1}{c^2}. \tag{9}$$

Поскольку как $\rho + \sigma = r/l$, так и $\rho - \sigma = s/k$ положительны, то ρ положительно. Тогда $0 < |\sigma| < \rho$.

При $\sigma = 0$ имеем просто

$$\varphi = \exp\left[-(p+\rho)\frac{x}{c}\right]\varphi_0 = e^{-\rho x/c}\varphi_0\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{10}$$

Следовательно, изменение φ со временем на расстоянии x в точности повторяет изменение на предыдущем конце, если не считать запаздывания на x/c и постоянного множителя затухания $e^{-\rho x/c}$. Скорость c очень велика, а затухание можно скомпенсировать, вводя усилители на приемном конце. При этом получается кабель без искажений, что достигается при $ls = kr$.

Если σ не равно нулю, то полагаем $\varphi_0 = H(t)$, и решение принимает вид

$$\varphi = \exp\left\{-\frac{x}{c}\left[(p+\rho)^2 - \sigma^2\right]^{1/2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \exp\left\{zt - \frac{x}{c}\left[(z+\rho)^2 - \sigma^2\right]^{1/2}\right\}\frac{dz}{z}. \tag{11}$$

Выражение для тока имеет вид

$$J = -\frac{1}{l(p+\rho+\sigma)}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{lc}\frac{p+\rho-\sigma}{[(p+\rho)^2-\sigma^2]^{1/2}}\exp\left\{-\frac{x}{c}[(p+\rho)^2-\sigma^2]^{1/2}\right\}. \tag{12}$$

Опустим сначала член $\rho-\sigma$ в первом множителе. Оставшаяся часть будет

$$I = \frac{1}{lc}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\exp\left\{-\frac{x}{c}[(z+\rho)^2-\sigma^2]^{1/2}+zt\right\}dz}{[(z+\rho)^2-\sigma^2]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i lc}e^{-\rho t}\int_L \frac{\exp\left[\zeta t-\frac{x}{c}(\zeta^2-\sigma^2)^{1/2}\right]d\zeta}{(\zeta^2-\sigma^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

Положим $\zeta = \frac{1}{2}\sigma\left(u+\frac{1}{u}\right)$. Тогда

$$I = \frac{1}{2\pi i lc}e^{-\rho t}\int_L \exp\frac{1}{2}\sigma\left(ut+\frac{l}{u}-\frac{xu}{c}+\frac{x}{uc}\right)\frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{lc}e^{-\rho t}I_0\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right) \quad \left(t-\frac{x}{c}>0\right). \tag{14}$$

Опущенный член получается путем интегрирования. Имеем

$$J = \frac{1}{lc}e^{-\rho t}I_0\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)+\frac{\rho-\sigma}{lc}\int_{x/c}^{t} e^{-\rho t}I_0\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)dt$$

$$\left(t>\frac{x}{c}\right). \tag{15}$$

Чтобы исследовать решение для φ, заметим прежде всего, что

$$\exp\left\{-\frac{x}{c}[(p+\rho)^2-\sigma^2]^{1/2}\right\} = e^{-(p+\rho)x/c}\exp\left[\frac{\sigma^2 x}{2(p+\rho)c}+\ldots\right], \tag{16}$$

где вторая экспонента разлагается по отрицательным степеням $p+\rho$. Следовательно, φ равно нулю вплоть до момента времени x/c, затем испытывает скачок на $e^{-\rho x/c}$, после чего изменяется непрерывно. Далее, мы можем выбрать пределы интегрирования, имеющие действительную часть, равную $-\infty$, и

затем продифференцировать по t. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \exp\left\{zt-\frac{x}{c}\left[(z+\rho)^2-\sigma^2\right]^{1/2}\right\}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}e^{-\rho t}\int\limits_M \exp\left[\zeta t-\frac{x}{c}\left(\zeta^2-\sigma^2\right)^{1/2}\right]d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}e^{-\rho t}\int\limits_M \exp\frac{1}{2}\sigma\left[u\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{1}{u}\left(t+\frac{x}{c}\right)\right]\frac{1}{2}\sigma\left(1-\frac{1}{u^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{2}\sigma e^{-\rho t}\left[\left(\frac{t+x/c}{t-x/c}\right)^{1/2}I_{-1}\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{t-x/c}{t+x/c}\right)^{1/2}I_1\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sigma e^{-\rho t}\,x/c}{(t^2-x^2/c^2)^{1/2}}I_1\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right). \qquad (17)$$

Но мы уже знаем φ сразу же после $t=x/c$. Отсюда

$$\varphi=e^{-\rho x/c}+\int\limits_{x/c}^{t}\frac{\sigma x/c}{(t^2-x^2/c^2)^{1/2}}e^{-\rho t}I_1\left(\sigma\sqrt{t^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)dt \qquad \left(t>\frac{x}{c}\right). \qquad (18)$$

22.06. Линейный источник тепла; вихревая линия. Уравнение теплопроводности в случае осевой симметрии имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{h^2}{\bar\omega}\frac{\partial}{\partial\bar\omega}\left(\bar\omega\frac{\partial V}{\partial\bar\omega}\right)=0. \qquad (1)$$

Такому же уравнению удовлетворяет вихрь скорости вязкой жидкости, когда движение происходит по окружностям вокруг оси [4], причем h^2 нужно заменить на кинематическую вязкость ν. Возьмем сначала концентрацию тепла на единицу длины оси равной $\varkappa$ при $t=0$. Тогда операционное решение будет иметь вид

$$V=A\mathrm{Kh}_0(q\bar\omega), \qquad (2)$$

где A — функция от t. Если ρc — теплоемкость единицы объема, то избыточное тепло в цилиндре радиуса $\bar\omega$ на единицу длины вдоль оси равно

$$2\pi\int\limits_0^{\bar\omega}\rho cV\bar\omega\,d\bar\omega=2\pi A\int\limits_0^{\bar\omega}\rho c\bar\omega\,\mathrm{Kh}_0(q\bar\omega)\,d\bar\omega=2\pi A\rho cq^{-2}\left[q\bar\omega\,\mathrm{Kh}_1(q\bar\omega)\right]_0^{\bar\omega}. \qquad (3)$$

При $t \to 0$ оно должно стремиться к $\varkappa$ для всех $\bar{\omega} > 0$. Но

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{q^2} [q\bar{\omega}\,\mathrm{Kh}_1(q\bar{\omega})] = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^2} [q\bar{\omega}\,\mathrm{Kh}_1(q\bar{\omega})] = 0 \qquad (4)$$

и

$$\lim_{\bar{\omega}\to 0} q\bar{\omega}\,\mathrm{Kh}_1(q\bar{\omega}) = \frac{2}{\pi}. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\varkappa = 4A\rho c q^{-2} \qquad (6)$$

и

$$V = \frac{\varkappa}{4\rho c} q^2\,\mathrm{Kh}_0(q\bar{\omega}) = \frac{\varkappa}{4\rho c} \frac{e^{-\omega^2/4h^2 t}}{\pi h^2 t}. \qquad (7)$$

Аналогично, если $\varkappa$ — начальная циркуляция относительно оси, то, полагая $p = \nu q^2$, мы получим выражение (2) для ζ вместо V, причем циркуляция будет равна $2\pi \int_0^{\bar{\omega}} \zeta\bar{\omega}\,d\bar{\omega}$. Поступая аналогично, находим [5]

$$\zeta = \frac{\varkappa}{4\pi\nu t} e^{-\bar{\omega}^2/4\nu t}.$$

Циркуляция равна $\varkappa(1 - e^{-\bar{\omega}^2/4\nu t})$, и для скорости находим выражение

$$\frac{\varkappa}{4\pi\bar{\omega}}(1 - e^{-\bar{\omega}^2/4\nu t}).$$

ПРИМЕРЫ

1. Можно показать, что для весьма вязкой жидкости поднятие поверхности вида $\sin \varkappa x$ убывает со временем как $\exp(Agt/\nu\varkappa)$. Покажите, что если начальное поднятие равно $\pm 1/2$ при $x \gtrless 0$, то в любой последующий момент времени оно будет равно

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Kh}_0\left(2e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{Agxt/\nu}\right),$$

и что разрыв при $x = 0$ не исчезает.

2. Единичная э. д. с. прикладывается при $t = 0$ к передающему концу неиндуктивной линии с сопротивлением R, емкостью C и утечкой G на единицу длины. Покажите, что в момент t ток у передающего конца дается выражением

$$I = \left(\frac{C}{\pi R}\right)^{1/2}\left(\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} + \lambda\int_0^t \frac{e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\right),$$

где $\lambda = G/C$. (I.C., 1943.)

3. Боковая поверхность и основание ($z = 0$) цилиндра $\bar{\omega} = a$ поддерживаются при нулевой температуре. Второе основание $z = b$ поддерживается

при температуре T. Докажите, что установившееся распределение температуры имеет вид

$$V = \frac{2T}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \frac{\operatorname{sh} \mu_n z}{\operatorname{sh} \mu_n b} \frac{J_0(\mu_n \bar{\omega})}{J_1(\mu_n a)},$$

где $\mu_1, \mu_2 \ldots$ — нули $J_0(\mu a)$. (I.C., 1939.)

4. Однородная цепь длины l и веса w свободно подвешена за один конец и совершает малые колебания. Рассчитайте длину математического маятника, эквивалентного колебанию с наименьшим периодом. (I.C., 1938.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jeffreys H.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **39**, 48—51 (1943).
2. *Lamb H.*, Phil. Trans., A**203**, 1—42 (1904).
3. *Jeffreys H.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **23**, 775 (1927).
4. *Lamb H.*, Hydrodynamics, 1932, p. 591. (Русский перевод: *Ламб Г.*, Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.)
5. *Goldstein S.*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **34**, 62 (1932).

Глава 23

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

... Тогда он
Разные виды начнет принимать и являться вам станет
Всем, что ползет по земле, и водою, и пламенем жгучим;
Вы ж, не робея, тем крепче его, тем сильнее держите.
Гомер, „Одиссея", кн. 4 (перевод В. А. Жуковского)

23.01. Гипергеометрическая функция в общем случае определяется рядом

$$F(a,\ b;\ c;\ z) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}z^3 + \ldots . \quad (1)$$

Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0. \quad (2)$$

Второе решение уравнения —

$$z^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1;\ 2-c;\ z). \quad (3)$$

Непосредственным преобразованием можно показать, что любое дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее три регулярные особые точки (одна из них может быть на бесконечности) и не имеющее других особых точек, можно привести к виду (2), и что все решения таких уравнений можно выразить через гипергеометрическую функцию. Этой функции посвящена обширная литература. Многие хорошо известные функции можно выразить через гипергеометрическую функцию. Отметим сразу, что при $b = c$ гипергеометрическая функция сводится к биномиальному ряду, а при $a = b = 1$ и $c = 2$ — к ряду, представляющему функцию $-z^{-1}\ln(1-z)$. Разложение функций Лежандра в ряд по степеням $1-x$ также относится к этому типу.

При нецелом c для $|z|<1$ пригодны оба ряда. При c целом, положительном, равном нулю или отрицательном возникают осложнения, которые были разобраны в гл. 16.

Если положить

$$x = \frac{1}{z},$$

то особые точки преобразованного уравнения будут ∞, 1, 0. Если же положить

$$x = 1 - z,$$

то особые точки будут 1, 0, ∞. Используя последовательно такие преобразования, в уравнение можно ввести любое из следующих независимых переменных:

$$z,\ \frac{1}{z},\ 1-z,\ \frac{1}{1-z},\ \frac{z-1}{z},\ \frac{z}{z-1},$$

причем в каждом из случаев уравнение сохраняет вид гипергеометрического, а имеющиеся два решения выражаются через гипергеометрическую функцию соответствующего аргумента. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет 12 решений вида (1), (3), каждое из которых можно выразить через два решения, образующие фундаментальную систему. Все решения имеют радиус сходимости, равный единице. Можно получить еще 12 решений вида $(1-z)^{c-a-b}\,F(c-a,\ c-b;\ c;\ z)$ и $z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}\,F(1-a,\ 1-b;\ 2-c;\ z)$. Каждое из них совпадает с одним из 12 первоначальных решений.

23.02. Ряд и дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции. Если положить $bz = x$ и затем устремить b к бесконечности, то получится ряд

$$u_1 = {}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x) = M(\alpha,\ \gamma,\ x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots . \quad (1)$$

В этих обозначениях первоначальный гипергеометрический ряд запишется в виде ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$. Первый индекс указывает число факториалов в числителе общего члена ряда, а второй — число факториалов в знаменателе, причем $n!$ не учитывается. Эти обозначения можно распространить на ряды, содержащие в общем члене любое число факториалов. Такие ряды называются обобщенными гипергеометрическими функциями. Функции Бесселя относятся к типу ${}_0F_1$; очевидно, их можно получить, если принять $\alpha x = y$ и затем устремить α к бесконечности.

Очевидно, ${}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x)$ — целая функция. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{du}{dx} - \alpha u = 0. \quad (2)$$

Вторым решением этого уравнения, кроме, быть может, случая, когда γ — целое число, является

$$u_2 = x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma,\ x) = x^{1-\gamma} + \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1+\alpha-\gamma)\dots(r+\alpha-\gamma)}{r!\,(2-\gamma)\dots(r+1-\gamma)}\, x^{r+1-\gamma}. \quad (3)$$

Следовательно, два независимых решения в виде рядов имеются всегда, кроме, быть может, случая, когда γ — целое (положительное, равное нулю или отрицательное). Если $\gamma = 1$, то (1) и (3) совпадают.

При целом $\gamma \geqslant 2$ в (3) все члены, начиная с члена с номером $r = \gamma - 1$, содержат в знаменателе множитель, равный нулю, и решение нельзя представить в виде (3), если только не окажется, что числитель содержит множитель равный нулю, т. е. если α не является таким целым числом, что $1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma - 1$.

Если γ равно нулю или отрицательному целому числу, а $r = 1 - \gamma$, то знаменатели всех членов (1), начиная с члена с x^r, обращаются в нуль и выражение (1) становится непригодным, если только α не является таким целым числом, что $\gamma \leqslant \alpha \leqslant 0$.

Следовательно, при некоторых специальных значениях α имеются два решения в виде рядов даже тогда, когда γ — целое число, отличное от единицы. В каждом из этих случаев можно показать, что ряд обрывается.

Если γ не целое, а α — отрицательное целое число или нуль, то ряд (1) обрывается. Если $\alpha - \gamma$ целое отрицательное, то обрывается ряд (3).

Если $\gamma > 0$, то ряд (1) пригоден всегда. Мы увидим, что ряд (1) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости, и все решения уравнения (2) при соответствующем выборе концов пути интегрирования можно выразить через интегралы такого вида совершенно таким же образом, как все решения уравнения Бесселя можно получить изменением концов пути интегрирования в интеграле для $J_n(x)$ при $\operatorname{Re} n \geqslant 0$.

Вырожденная гипергеометрическая функция зависит от трех независимых переменных, и поэтому составить ее полные таблицы невозможно. Если для табулирования функции одного переменного достаточна страница, то функция двух переменных требует книгу, функция трех переменных — комнату обычных размеров, заставленную книжными шкафами, а функция четырех переменных — большую библиотеку. Следовательно, теория вырожденной гипергеометрической функции и тем более гипергеометрической функции состоит главным образом из общих пред-

ложений с подробными приложениями к некоторым частным случаям.

23.03. Представление в виде контурных интегралов. Интегралы в комплексной плоскости, выражающие вырожденные гипергеометрические функции, можно сразу получить операционным методом. Напишем

$$x^{\gamma-1}{}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)(\gamma-1)!}{r!}\frac{x^{\gamma+r-1}}{(\gamma+r-1)!}=$$

$$=(\gamma-1)!\sum\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)}{r!}p^{-(\gamma+r-1)}=$$

$$=(\gamma-1)!\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\alpha}p^{1-\gamma},\qquad(4)$$

$$x^{\gamma-1}{}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x)=\frac{(\gamma-1)!}{2\pi i}\int_L\frac{e^{zx}dz}{z^{\gamma}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{(\gamma-1)!}{2\pi i}\int_L\frac{e^{zx}dz}{z^{\gamma-\alpha}(z-1)^{\alpha}}.\qquad(5)$$

Аналогично

$$x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)=(1-\gamma)!\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-(1+\alpha-\gamma)}p^{\gamma-1},\qquad(6)$$

$$x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)=\frac{(1-\gamma)!}{2\pi i}\int_L\frac{e^{zx}z^{\alpha-1}dz}{(z-1)^{1+\alpha-\gamma}}.\qquad(7)$$

Эти формулы нужно считать пригодными в первую очередь для действительных положительных x; затем при помощи аналитического продолжения, полагая $zx=\lambda$, можно получить

$${}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x)=\frac{(\gamma-1)!}{2\pi i}\int_M\frac{e^{\lambda}\lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda-x)^{\alpha}}d\lambda,\qquad(8)$$

$${}_1F_1(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)=\frac{(1-\gamma)!}{2\pi i}\int_M\frac{e^{\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda-x)^{1+\alpha-\gamma}}d\lambda,\qquad(9)$$

пригодные для всех x. Если опустить факториалы, то эти две формулы будут иметь смысл и при целых γ. Если в (8) положить $\lambda=\varkappa+x$, то получится

$$u_1={}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x)=\frac{(\gamma-1)!}{2\pi i}e^{x}\int_M\frac{e^{\varkappa}\varkappa^{-\alpha}}{(\varkappa+x)^{\gamma-\alpha}}d\varkappa=$$

$$=e^{x}{}_1F_1(\gamma-\alpha,\ \gamma,-x)\qquad(10)$$

и аналогично

$$u_2 = x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, x) = x^{1-\gamma}e^x{}_1F_1(1-\alpha, 2-\gamma, -x). \quad (11)$$

Формула (10) весьма полезна при целых $\gamma-\alpha \leqslant 0$, так как в этом случае второй сомножитель — многочлен. Аналогично формула (11) полезна при целых $1-\alpha \leqslant 0$. Следовательно, если $\gamma-\alpha$ или α — целое число, то независимо от его знака одно из решений сводится к элементарной функции. Существует много рекуррентных соотношений, аналогичных рекуррентным соотношениям для функций Бесселя *)

Далее, имеем

$$\frac{d}{dx}{}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = \frac{(\gamma-1)!\alpha}{2\pi i}\int_M \frac{e^\lambda \lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}d\lambda =$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\alpha}{\gamma!}{}_1F_1(\alpha+1, \gamma+1, x) = \frac{\alpha}{\gamma}{}_1F_1(\alpha+1, \gamma+1, x), \quad (12)$$

Эти формулы также легко получаются дифференцированием рядов.

Если положить $\alpha x = y$ и устремить α к бесконечности, то полученные интегралы с точностью до некоторых простых множителей превращаются в интегралы Шлефли для функций Бесселя.

23.04. Асимптотические формулы стоксовского типа. Формула **23.03** (8) определяет функцию, аналитическую при всех действительных и комплексных x; однако при нецелых α и γ необходимо провести соответствующие разрезы. Если $\operatorname{Im} x$ положительна, то путь интегрирования M можно заменить двумя петлями, охватывающими точки ветвления. Можно показать, что интеграл по каждой из петель дает решение дифференциального уравнения **23.02** (2). Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int \frac{e^\lambda \lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda-x)^\alpha}d\lambda, \quad (1)$$

в котором пределы интегрирования не зависят от x. Тогда имеем

$$x\frac{d^2I}{dx^2} + (\gamma-x)\frac{dI}{dx} - \alpha I =$$

$$= \int e^\lambda \lambda^{\alpha-\gamma}\left[\frac{\alpha(\alpha+1)x}{(\lambda-x)^{\alpha+2}} + \frac{\alpha(\gamma-x)}{(\lambda-x)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{(\lambda-x)^\alpha}\right]d\lambda. \quad (2)$$

*) См. [1]. Таблицы имеются также в [2].

Заменим в числителе x на $\lambda-(\lambda-x)$ и расположим выражение в фигурных скобках по степеням $\lambda-x$. Имеем

$$\frac{x}{(\lambda-x)^{\alpha}}=\frac{\lambda}{(\lambda-x)^{\alpha}}-\frac{1}{(\lambda-x)^{\alpha-1}}, \tag{3}$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)x}{(\lambda-x)^{\alpha+2}}+\frac{\alpha(\gamma-x)}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}-\frac{\alpha}{(\lambda-x)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)\lambda}{(\lambda-x)^{\alpha+2}}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}-\frac{\alpha\lambda}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}+\frac{\alpha\gamma}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}, \tag{4}$$

$$\int e^{\lambda}\lambda^{\alpha-\gamma+1}\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda-x)^{\alpha+2}}d\lambda=-\int e^{\lambda}\lambda^{\alpha-\gamma+1}\alpha d\frac{1}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}=$$

$$=-\left[e^{\lambda}\frac{\alpha\lambda^{\alpha-\gamma+1}}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}\right]+\int\frac{\alpha e^{\lambda}}{(\lambda-x)^{\alpha+1}}\left[\lambda^{\alpha-\gamma+1}+(\alpha-\gamma+1)\lambda^{\alpha-\gamma}\right]d\lambda. \tag{5}$$

Последний интеграл и интегралы, содержащие три последних члена из (4), взаимно уничтожаются. Следовательно, (1) является

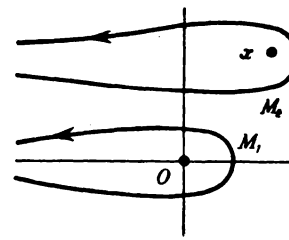

Рис. 70.

решением дифференциального уравнения при условии, что внеинтегральная часть (5) равна нулю, а это выполняется для любого пути интегрирования, на концах которого $\operatorname{Re}\lambda=-\infty$. Следовательно, интегралы по путям M_1 и M_2, показанным на рис. 70, дают отдельные решения дифференциального уравнения.

На пути M_1 нужно обратить особое внимание на фазу $\lambda-x$. На действительной положительной полуоси функция λ^{α} выбрана действительной и положительной. Следовательно, и $(\lambda-x)^{\alpha}$ действительна и положительна при действительных и положительных $\lambda-x$. Если x стремится к некоторому действительному положительному значению и контуры при деформировании не пересекаются, то от действительных λ, больших $\operatorname{Re}x$, можно пройти к точкам вблизи от начала координат, только обойдя на угол $-\pi$ вокруг x. Следовательно, на контуре M_1

$$(\lambda-x)^{\alpha}=(x-\lambda)^{\alpha}e^{-\alpha\pi i}.$$

Теперь интеграл по M_1 можно разложить по обратным степеням x:

$$I_1 = \int\limits_{M_1} \frac{e^\lambda \lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda - x)^\alpha} d\lambda = \int\limits_{M_1} e^\lambda \lambda^{\alpha-\gamma} e^{\alpha i\pi} x^{-\alpha} \left(1 - \frac{\lambda}{x}\right)^{-\alpha} d\lambda \sim$$

$$\sim x^{-\alpha} e^{i\alpha\pi} \int\limits_{M_1} e^\lambda \left(\lambda^{\alpha-\gamma} + \frac{\alpha\lambda^{\alpha-\gamma+1}}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^{\alpha-\gamma+2}}{2!\,x^2} + \ldots\right) d\lambda =$$

$$= x^{-\alpha} e^{i\alpha\pi} 2\pi i \left[\frac{1}{(\gamma-\alpha-1)!} + \frac{\alpha}{(\gamma-\alpha-2)!\,x} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\gamma-\alpha-3)!\,2!\,x^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2\pi i x^{-\alpha} e^{i\alpha\pi}}{(\gamma-\alpha-1)!} \left[1 + \frac{\alpha(\gamma-\alpha-1)}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha-2)}{2!\,x^2} + \ldots\right]. \quad (6)$$

На M_2 положим $\lambda = x + \varkappa$. Тогда

$$I_2 = e^x \int\limits_{-\infty,\,0+}^{-\infty} \frac{e^\varkappa (x+\varkappa)^{\alpha-\gamma}}{\varkappa^\alpha} d\varkappa \sim$$

$$\sim e^x x^{\alpha-\gamma} \int\limits_{-\infty,\,0+}^{-\infty} e^\varkappa \varkappa^{-\alpha} \left[1 + \frac{(\alpha-\gamma)\varkappa}{x} + \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)\varkappa^2}{2!\,x^2} + \ldots\right] d\varkappa =$$

$$= 2\pi i e^x x^{\alpha-\gamma} \left[\frac{1}{(\alpha-1)!} + \frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-2)!\,x} + \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{(\alpha-3)!\,2!\,x^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2\pi i x^{\alpha-\gamma} e^x}{(\alpha-1)!} \left[1 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-\gamma)}{x} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{2!\,x^2} + \ldots\right]. \quad (7)$$

При больших положительных $\operatorname{Re} x$ каждый член (7) намного больше I_1, и в смысле Пуанкаре I_1 можно пренебречь. Однако при фактически встречающихся значениях $\operatorname{Re} x$ величина I_1 может оказаться сравнимой с величиной некоторых членов ряда I_2, и поэтому I_1 стоит сохранять. Тогда при $\operatorname{Im} x > 0$ получим

$$_1F_1(\alpha, \gamma, x) \sim \frac{(\gamma-1)!}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-\gamma} e^x \left[1 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-\gamma)}{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{2!\,x^2} + \ldots\right] + \frac{(\gamma-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!} x^{-\alpha} e^{\alpha i\pi} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\alpha(\gamma-\alpha-1)}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha-2)}{2!\,x^2} + \ldots\right]. \quad (8)$$

Если $\operatorname{Im} x < 0$, то эта формула остается справедливой при условии, что контур M_2 по-прежнему расположен выше контура M_1. Но если расположить M_2 ниже M_1, что было бы естественнее, то множитель $e^{\alpha i\pi}$ нужно заменить на $e^{-\alpha i\pi}$. Это еще один пример разрывности коэффициентов в асимптотическом разложении.

Для $\operatorname{Im} x > 0$ получается также

$$x^{1-\gamma}\,{}_1F_1(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma,\ x) =$$
$$= J_2 + J_1 \sim \frac{(1+\gamma)!}{(\alpha-\gamma)!}\,x^{\alpha-\gamma}e^x\left[1+\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-1)}{x}+\ \ldots\right]+$$
$$+\frac{(1-\gamma)!}{(-\alpha)!}\,e^{(1+\alpha-\gamma)\,i\pi}x^{-\alpha}\left[1+\frac{(1+\alpha-\gamma)(-\alpha)}{x}+\ \ldots\right]. \qquad (9)$$

Ряды в формулах (8) и (9) одинаковы, а коэффициенты их различны. Однако при больших $\operatorname{Re} x$ часть, появляющаяся при интегрировании по M_1, пренебрежимо мала по сравнению с частью, появляющейся при интегрировании по M_2. Поэтому решения почти пропорциональны. При малых $\operatorname{Re} x$, особенно при чисто мнимых x, приходится сохранять оба ряда. (Для $\operatorname{Im} x < 0$ следует переменить i на $-i$.)

Получается, что при переменном x функции J_1 и J_2 отличаются от I_1 и I_2 только постоянными множителями, если только те же самые разложения остаются пригодными. Действительно, все четыре функции — решения одного и того же дифференциального уравнения, а I_1 не пропорционально I_2. Следовательно, J_1 и J_2 можно линейно выразить через I_1 и I_2. Но если $J_1 = AI_1 + BI_2$ и $B \neq 0$, то J_1 должно возрастать как e^x при $\operatorname{Re} x \to \infty$.

Но это не имеет места. Следовательно, $B = 0$. Аналогично, полагая $\operatorname{Re} x \to -\infty$, можно показать, что J_2 равно произведению постоянной на I_2.

Этот результат позволяет выразить I_1, I_2, J_1, J_2 через ряды u_1 и u_2 при условии, что они существуют. В самом деле, если написать

$$\frac{(\gamma-1)!}{2\pi i}\int\limits_{M_1}\frac{e^\lambda\lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda-x)^\alpha}\,d\lambda = S_1, \quad \frac{(\gamma-1)!}{2\pi i}\int\limits_{M_2}\frac{e^\lambda\lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda-x)^\alpha}\,d\lambda = S_2, \qquad (10)$$

$$\frac{(1-\gamma)!}{2\pi i}\,x^{1-\gamma}\int\limits_{M_1}\frac{e^\lambda\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda-x)^{\alpha-\gamma+1}}\,d\lambda = J_1,$$
$$\frac{(1-\gamma)!}{2\pi i}\,x^{1-\gamma}\int\limits_{M_2}\frac{e^\lambda\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda-x)^{\alpha-\gamma+1}}\,d\lambda = J_2, \qquad (11)$$

то получим

$$u_1 = S_1 + S_2, \qquad (12)$$

$$u_2 = J_1 + J_2 = \frac{(1-\gamma)!}{(\gamma-1)!}\left[\frac{(\gamma-\alpha-1)!}{(-\alpha)!}\,e^{(1-\gamma)\,i\pi}S_1 + \frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-\gamma)!}\,S_2\right], \qquad (13)$$

откуда

$$\left[\frac{(\gamma-\alpha-1)!}{(-\alpha)!}\,e^{-\gamma i\pi} + \frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-\gamma)!}\right]S_1 = -\frac{(\gamma-1)!}{(1-\gamma)!}\,u_2 + \frac{(\alpha-1)!}{(\alpha-\gamma)!}\,u_1. \qquad (14)$$

Используем дважды тождество

$$\sin \alpha\pi = \frac{\pi}{(\alpha-1)!\,(-\alpha)!}. \tag{15}$$

Тогда коэффициент при S_1 в левой части (14) равен

$$\frac{\pi \sin \gamma\pi e^{-i\alpha\pi}}{(-\alpha)!\,(\alpha-\gamma)!\sin \alpha\pi \sin(\gamma-\alpha)\pi}. \tag{16}$$

Далее, если $\lambda = -\mu$, то

$$S_1 = -\frac{(\gamma-1)!}{\pi} \sin(\alpha-\gamma)\pi e^{i\alpha\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu}\mu^{\alpha-\gamma}}{(x+\mu)^\alpha} d\mu \qquad (\mathrm{Re}(\alpha-\gamma) > -1), \tag{17}$$

$$J_1 = -\frac{(1-\gamma)!}{\pi} x^{1-\gamma} \sin \alpha\pi e^{(\alpha-\gamma)i\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}}{(x+\mu)^{\alpha-\gamma+1}} d\mu \quad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0). \tag{18}$$

Из последней формулы следует

$$S_1 = \frac{(\gamma-1)!\, e^{i\alpha\pi}}{(\gamma-\alpha-1)!\,(\alpha-1)!} x^{1-\gamma} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}}{(x+\mu)^{\alpha-\gamma+1}} d\mu \qquad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0). \tag{19}$$

Запишем

$$S_1 = e^{i\alpha\pi} \frac{(\gamma-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!} U(\alpha, \gamma, x). \tag{20}$$

Тогда при $0 \leqslant \arg x < \pi$ (при $-\pi < \arg x \leqslant 0$ нужно i заменить на $-i$) получаем из (20)

$$U(\alpha, \gamma, x) = \frac{e^{-i\alpha\pi}}{2\pi i}(\gamma-\alpha-1)! \int_{M_1} \frac{e^\lambda \lambda^{\alpha-\gamma}}{(\lambda-x)^\alpha} d\lambda, \tag{21}$$

из (11), (13) и (20)

$$U(\alpha, \gamma, x) = \frac{e^{i(\gamma-\alpha-1)\pi}}{2\pi i} (-\alpha)!\, x^{1-\gamma} \int_{M_1} \frac{e^\lambda \lambda^{\alpha-1}}{(\lambda-x)^{\alpha-\gamma+1}} d\lambda, \tag{22}$$

из (17)

$$U(\alpha, \gamma, x) = \frac{1}{(\alpha-\gamma)!} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu}\mu^{\alpha-\gamma}}{(x+\mu)^\alpha} d\mu \qquad (\mathrm{Re}(\alpha-\gamma) > -1), \tag{23}$$

из (19)

$$U(\alpha, \gamma, x) = \frac{1}{(\alpha-1)!} x^{1-\gamma} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}}{(x+\mu)^{\alpha-\gamma+1}} d\mu \qquad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0), \tag{24}$$

из (14) и (16) при нецелых γ

$$U(\alpha, \gamma, x) = \frac{(-\gamma)!}{(\alpha-\gamma)!} u_1 + \frac{(\gamma-2)!}{(\alpha-1)!} u_2 \tag{25}$$

и из (6)

$$U(\alpha, \gamma, x) \sim x^{-\alpha}\left[1 + \frac{\alpha(\gamma-\alpha-1)}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\alpha-2)}{2!\,x^2} + \ldots\right]. \tag{26}$$

При целых отрицательных $\alpha-1$ или $\alpha-\gamma$ ряд в формуле (26) обрывается, и в этом случае конечная сумма является точным решением уравнения. В каждом из этих случаев одно из решений в виде ряда в формуле (25) умножается на нуль, и поэтому U становится пропорциональной остающемуся решению.

Если $\gamma-\alpha-1$ или $-\alpha$ — целое отрицательное число, то соответственно (21) или (22) определяется по непрерывности.

Первое полное исследование этих функций было дано Бернсом, который преобразовал ряды в контурные интегралы, содержащие $z!$, где z — комплексное переменное, по которому производится интегрирование. Члены ряда представляют собой вычеты функции в полюсах факториала. Приведем теперь другой способ получения асимптотических формул, принадлежащий Гольдштейну.

23.05. Операционная формула Гольдштейна [3]. Рассмотрим теперь другой подход, в котором операционная форма вырожденной гипергеометрической функции выражается через функции Бесселя и снова выводится формула **23.04** (23). Приводя ряды к операционному виду, мы вводили такие степени x, что оператор принимал алгебраический вид, причем множители γ устранялись из знаменателей. Можно было бы, однако, убрать α из числителей. Сначала заменим x на $-a^2/4t$. Если теперь ввести оператор p, соответствующий t, то получим

$$p^n = \frac{t^{-n}}{(-n)!}, \quad p^{n+1} = \frac{t^{-n-1}}{(-n-1)!} = -\frac{nt^{-n-1}}{(-n)!}, \tag{1}$$

$${}_1F_1\left(\alpha, \gamma, -\frac{a^2}{4t}\right) = 1 + \frac{(-\alpha)!}{(-\alpha-1)!\,1!\,\gamma}\frac{a^2}{4t} + \\ + \frac{(-\alpha)!}{(-\alpha-2)!\,2!\,\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{a^2}{4t}\right)^2 + \ldots, \tag{2}$$

$${}_1F_1\left(\alpha, \gamma, -\frac{a^2}{4t}\right) = (-\alpha)!\left(\frac{4t}{a^2}\right)^{\alpha}\left[\frac{1}{(-\alpha)!}\left(\frac{a^2}{4t}\right)^{\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(-\alpha-1)!\,1!\,\gamma}\left(\frac{a^2}{4t}\right)^{\alpha+1} + \ldots\right] = \\ = (-\alpha)!\left(\frac{4t}{a^2}\right)^{\alpha}\left[\left(\frac{a^2p}{4}\right)^{\alpha} + \frac{1}{1!\,\gamma}\left(\frac{a^2p}{4}\right)^{\alpha+1} + \ldots\right] = \\ = (-\alpha)!(\gamma-1)!\left(\frac{1}{2}a\right)^{1-\gamma} t^{\alpha} p^{\alpha-1/2\gamma+1/2} I_{\gamma-1}(ap^{1/2}). \tag{3}$$

Эта формула справедлива для всех t с положительной действительной частью. В самом деле, если представить $I_{\nu-1}(ap^{1/2})$ в виде интеграла по контуру M, то он дает множитель порядка $\exp(az^{1/2})$, который при $z\to-\infty$ подавляется множителем $\exp(tz)$, если действительная часть t положительна. Тогда, используя **23.03** (10) и (3), находим

$$
{}_1F_1\left(\alpha,\ \gamma,\ \frac{a^2}{4t}\right)=e^{a^2/4t}\,{}_1F_1\left(\gamma-\alpha,\ \gamma,\ -\frac{a^2}{4t}\right)=
$$

$$
=e^{a^2/4t}(\alpha-\gamma)!\,(\gamma-1)!\left(\frac{1}{2}a\right)^{1-\gamma}t^{\gamma-\alpha}p^{1/2\gamma-\alpha+1/2}I_{\gamma-1}(ap^{1/2}). \qquad (4)
$$

Аналогично, используя **23.03** (11), получаем

$$
\left(\frac{a^2}{4t}\right)^{1-\gamma}{}_1F_1\left(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma,\ \frac{a^2}{4t}\right)=
$$

$$
=e^{a^2/4t}(\alpha-1)!\,(1-\gamma)!\left(\frac{1}{2}a\right)^{1-\gamma}t^{\gamma-\alpha}p^{1/2\gamma-\alpha+1/2}I_{1-\gamma}(ap^{1/2}). \qquad (5)
$$

Постоянные множители в формулах (4) и (5) относятся как коэффициенты в формуле **23.04** (14). Кроме того, при больших a функции $I_{\gamma-1}(az^{1/2})$ и $I_{1-\gamma}(az^{1/2})$ почти совпадают, и в качестве подходящего второго решения, имеющего другое поведение на бесконечности, можно выбрать

$$
U=\pi e^{a^2/4t}\left(\frac{1}{2}a\right)^{1-\gamma}t^{\gamma-\alpha}p^{1/2\gamma-\alpha+1/2}\,\mathrm{Kh}_{1-\gamma}(ap^{1/2}). \qquad (6)
$$

Для его исследования используем представление

$$
\mathrm{Kh}_n(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}\int_0^\infty\exp\left(-u-\frac{x^2}{4u}\right)u^{n-1}\,du\quad|\arg x|<\frac{1}{4}\pi. \qquad (7)
$$

Если обращать (6), используя путь интегрирования L, то U сходится, так как

$$
\mathrm{Kh}_n(z)=O(z^{-1/2}e^{-z}),
$$

и на этом пути удовлетворяется условие $\mathrm{Re}(a^2z)>0$. Тогда имеем

$$
\mathrm{Kh}_{1-\gamma}(ap^{1/2})=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}ap^{1/2}\right)^{\gamma-1}\int_0^\infty\exp\left(-u-\frac{a^2p}{4u}\right)u^{-\gamma}\,du=
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}ap^{1/2}\right)^{\gamma-1}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\gamma}H\left(t-\frac{a^2}{4u}\right)du=
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}ap^{1/2}\right)^{\gamma-1}\int_{a^2/4t}^\infty e^{-u}u^{-\gamma}\,du, \qquad (8)
$$

$$
\pi p^{1/2\gamma-\alpha+1/2}\,\mathrm{Kh}_{1-\gamma}(ap^{1/2})=\left(\frac{1}{2}a\right)^{\gamma-1}p^{\gamma-\alpha}\int_{a^2/4t}^\infty e^{-u}u^{-\gamma}\,du. \qquad (9)
$$

Но

$$\frac{1}{p} F(p)\, g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \tag{10}$$

и

$$p^{\gamma-\alpha+1} H(t) = \frac{t^{\alpha-\gamma-1}}{(\alpha-\gamma-1)!} \qquad (\mathrm{Re}\,(\alpha-\gamma) > -1). \tag{11}$$

Следовательно, (9) равно

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^{\gamma-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-\gamma-1}}{(\alpha-\gamma-1)!} d\tau \int_{a^2/4\tau}^{\infty} e^{-u} u^{-\gamma}\, du. \tag{12}$$

Интегрирование производится по области, заштрихованной на рис. 71. Меняя порядок интегрирования, приходим к интегри-

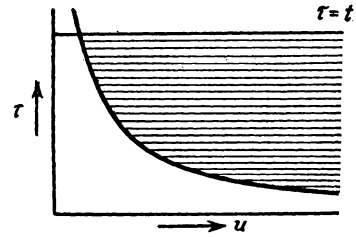

Рис. 71.

рованию в пределах $a^2/4u < \tau < t$ и $a^2/4t < u < \infty$. Получим

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^{\gamma-1} \int_{a^2/4t}^{\infty} e^{-u} u^{-\gamma}\, du \int_{a^2/4u}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-\gamma-1}}{(\alpha-\gamma-1)!} d\tau =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^{\gamma-1}}{(\alpha-\gamma)!} \int_{a^2/4t}^{\infty} e^{-u} u^{-\gamma} \left(t - \frac{a^2}{4u}\right)^{\alpha-\gamma} du =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^{\gamma-1}}{(\alpha-\gamma)!} t^{\alpha-\gamma} \int_{a^2/4t}^{\infty} e^{-u} u^{-\alpha} \left(u - \frac{a^2}{4t}\right)^{\alpha-\gamma} du =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^{\gamma-1}}{(\alpha-\gamma)!} t^{\alpha-\gamma} e^{-a^2/4t} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha-\gamma} \left(v + \frac{a^2}{4t}\right)^{-\alpha} dv. \tag{13}$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{(\alpha-\gamma)!} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha-\gamma} \left(v + \frac{a^2}{4t}\right)^{-\alpha} dv \qquad (\mathrm{Re}\,(\alpha-\gamma) > -1) \tag{14}$$

и есть искомое решение. Кроме того, используя связь функции Kh_n с I_{-n} и I_n, получим

$$U(\alpha,\ \gamma,\ x) = \frac{1}{(\alpha-\gamma)!}\int_0^\infty e^{-v}v^{\alpha-\gamma}(v+x)^{-\alpha}\,dv, \tag{15}$$

$$U(\alpha,\ \gamma,\ x) = -\pi\operatorname{cosec}\gamma\pi\left[\frac{1}{(\alpha-1)!\,(1-\gamma)!}u_2 - \frac{1}{(\alpha-\gamma)!\,(\gamma-1)!}u_1\right] =$$

$$= \left[\frac{(-\gamma)!}{(\alpha-\gamma)!}u_1 + \frac{(\gamma-2)!}{(\alpha-1)!}u_2\right]. \tag{16}$$

Числовые множители можно проверить, полагая $x=0$. Полученный результат совпадает с **23.04** (25).

Далее

$$\mathrm{Kh}_{-n}(z) = \mathrm{Kh}_n(z), \tag{17}$$

и поэтому подобным способом получается также

$$U\left(\alpha,\ \gamma,\ \frac{a^2}{4t}\right) = \pi e^{a^2/4t}\left(\frac{1}{2}a\right)^{1-\gamma}t^{\gamma-\alpha}p^{1/2\gamma-\alpha+1/2}\mathrm{Kh}_{\gamma-1}(ap^{1/2}) =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(\frac{a^2}{4t}\right)^{1-\gamma}e^{a^2/4t}\int_{a^2/4t}^\infty e^{-u}u^{\gamma-\alpha-1}\left(u-\frac{a^2}{4t}\right)^{\alpha-1}du. \tag{18}$$

Тогда

$$U(\alpha,\ \gamma,\ x) = \frac{1}{(\alpha-1)!}x^{1-\gamma}e^x\int_x^\infty e^{-u}u^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{\alpha-1}\,du =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)!}x^{1-\gamma}\int_0^\infty e^{-v}v^{\alpha-1}(v+x)^{\gamma-\alpha-1}\,dv \quad (\mathrm{Re}\,\alpha>0). \tag{19}$$

Представления в виде (15) и (19) были получены в **23.04** при помощи контурных интегралов I_1 и J_1.

Выражения **23.04** (21), (22) можно принять за определения функции U для всех α и γ без ограничений, так как эти выражения задают аналитическую функцию α и γ при всех их значениях. Тогда формула (16), справедливая в некоторых интервалах непрерывного изменения α и γ, становится пригодной для всех α, γ, причем при целых γ правая часть определяется по непрерывности. При действительных отрицательных x формулы теряют однозначность, и поэтому в плоскости x требуется произвести разрез вдоль отрицательной действительной полуоси. Но подобные разрезы необходимы для определения $x^{1-\gamma}$ при нецелых γ, так что при этом не происходит потери общности.

Для непосредственного получения сходящихся разложений в ряды интегралы неудобны. Действительно, если пытаться

разложить $u-x$ по убывающим степеням x, то при $|u|<|x|$ ряд будет расходиться и поэтому нельзя выбрать такого пути интегрирования, проходящего между особыми точками, чтобы в каждой его точке ряд сходился.

Если взять любой из интегралов по петле M_2, то без особого труда можно найти, что он пропорционален $e^x U(\gamma-\alpha, \gamma, z)$, где $z=xe^{\pm i\pi}$. Имея в виду ограничение $|\arg z|<\pi$ [см. **23.04** (21)], возьмем нижний знак при $\operatorname{Im} x>0$ и верхний при $\operatorname{Im} x<0$. При $\operatorname{Im} x>0$ располагаем M_2 полностью выше действительной оси и находим решение

$$V(\alpha, \gamma, x)=\frac{(\alpha-1)!}{2\pi i}e^x\int\limits_{-\infty,\,0+}^{-\infty}e^{\varkappa}(x+\varkappa)^{\alpha-\gamma}\varkappa^{-\alpha}\,d\varkappa=$$

$$=\frac{(\alpha-\gamma)!}{2\pi i}e^x x^{1-\gamma}\int\limits_{-\infty,\,0+}^{-\infty}e^{\varkappa}(x+\varkappa)^{\alpha-1}\varkappa^{\gamma-\alpha-1}\,d\varkappa\sim$$

$$\sim e^x x^{\alpha-\gamma}, \qquad (20)$$

причем

$$u_1={}_1F_1(\alpha, \gamma, x)=\frac{(\gamma-1)!}{(\alpha-1)!}V+\frac{(\gamma-1)!}{(\gamma-\alpha-1)!}e^{\alpha i\pi}U \qquad (\operatorname{Im} x>0), \quad (21)$$

$$u_2=x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, x)=$$

$$=\frac{(1-\gamma)!}{(\alpha-\gamma)!}V+\frac{(1-\gamma)!}{(-\alpha)!}e^{(1+\alpha-\gamma)\,i\pi}U \qquad (\operatorname{Im} x>0), \quad (22)$$

откуда

$$V(\alpha, \gamma, x)=\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left[\frac{e^{\alpha i\pi}}{(\gamma-\alpha-1)!\,(1-\gamma)!}u_2+\frac{e^{(\alpha-\gamma)\,i\pi}}{(-\alpha)!\,(\gamma-1)!}u_1\right]. \quad (23)$$

При $\operatorname{Im} x<0$ помещаем M_2 полностью под действительной осью. В результате получим другое решение $W(\alpha, \gamma, x)$, равное правой части (23), в которой i заменено на $-i$. При $\operatorname{Im} x<0$ функция $W\sim e^x x^{\alpha-\gamma}$, и аналитическим продолжением $V(\alpha, \gamma, x)$ служит

$$W(\alpha, \gamma, x)-\frac{2\pi i U(\alpha, \gamma, x)}{(\gamma-\alpha-1)!\,(-\alpha)!}.$$

Функция V, кроме простого асимптотического представления, обладает интересным свойством: при $\operatorname{Re} x\to-\infty$ она экспоненциально стремится к нулю. Кроме того, функция V, определенная одним из интегралов (20), представляет собой решение дифференциального уравнения, независимое от U, даже при целых γ и когда решения в виде рядов совпадают.

Из **23.03** (10) и (11) мы видели, что при целом $\gamma-\alpha$ или $1-\alpha$ одно из решений выражается в виде конечной суммы.

В частности,

$$ {}_1F_1(\alpha, \alpha, x) = e^x, \quad {}_1F_1(0, \gamma, x) = 1, \quad {}_1F_1(-1, \gamma, x) = 1 - \frac{x}{\gamma}. $$

23.051. Сходящееся разложение функции $U(\alpha, \gamma, x)$ при положительных целых γ. Положим $\gamma = m + c$, где m — целое положительное, и устремим c к нулю:

$$ U(\alpha, m+c, x) = \frac{(-m-c)!}{(\alpha-m-c)!}\,{}_1F_1(\alpha, m+c, x) + $$
$$ + \frac{(m+c-2)!}{(\alpha-1)!}\,x^{1-m-c}\,{}_1F_1(1+\alpha-m-c, 2-m-c, x). $$

При $c \to 0$ члены второго ряда вплоть до члена с x^{m-2} дают слагаемые с отрицательными степенями x. Первый ряд таких членов не содержит. Соответствующие члены в U стремятся к

$$ U_1 = \frac{(m-2)!}{(\alpha-1)!}\,x^{1-m}\,G(x), $$

где $G(x)$ представляет собой разложение ${}_1F_1(1+\alpha-m, 2-m, x)$ до члена с x^{m-2}. Далее, возьмем из первого ряда член с x^r и из второго ряда член с x^{r+m-1}. С учетом соответствующих коэффициентов они дают

$$ u_r = \frac{(-m-c)!}{(\alpha-m-c)!}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)}{r!\,(m+c)\ldots(m+c+r-1)}\,x^r + $$
$$ + \frac{(m+c-2)!}{(\alpha-1)!}\,\frac{(1+\alpha-m-c)\ldots(r+\alpha-1-c)}{(r+m-1)!\,(2-m-c)\ldots(r-c)}\,x^{r-c} = $$
$$ = \frac{(-m-c)!}{(\alpha-m-c)!}\,\frac{(\alpha+r-1)!}{(\alpha-1)!\,r!}\,\frac{(m+c-1)!}{(m+c+r-1)!}\,x^r + $$
$$ + \frac{(m+c-2)!}{(\alpha-1)!}\,\frac{(r+\alpha-1-c)!\,(1-m-c)!}{(\alpha-m-c)!\,(r+m-1)!\,(r-c)!}\,x^{r-c} = $$
$$ = \frac{\pi}{\sin(m+c)\pi}\,\frac{1}{(\alpha-1)!\,(\alpha-m-c)!}\left[\frac{(\alpha+r-1)!}{(m+r-1+c)!\,r!}\,x^r - \right. $$
$$ \left. - x^r\,\frac{(\alpha+r-1-c)!}{(m+r-1)!\,(r-c)!}\,x^{r-c}\right]. $$

Из **15.04** следует, что

$$ u_r \to (-1)^m\,\frac{x^r}{(\alpha-1)!\,(\alpha-m)!}\left\{\frac{(\alpha+r-1)!}{(m+r-1)!\,r!}\ln x + \frac{(\alpha+r-1)!}{(m+r-1)!}\times\right. $$
$$ \left.\times\left[-\mathcal{F}(m+r-1) + \mathcal{F}(\alpha+r-1) - \mathcal{F}(r)\right]\right\} = $$
$$ = \frac{(-1)^m}{(m-1)!\,(\alpha-m)!}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)}{r!\,m(m+1)\ldots(m+r-1)}\times $$
$$ \times x^r\left[\ln x - \mathcal{F}(m+r-1) - \mathcal{F}(r) + \mathcal{F}(\alpha+r-1)\right]. $$

Но

$$-\mathcal{F}(m+r-1)-\mathcal{F}(r)+\mathcal{F}(\alpha+r-1)=$$
$$=-\mathcal{F}(m-1)-\mathcal{F}(0)+\mathcal{F}(\alpha-1)-\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\ldots-\frac{1}{m+r-1}-$$
$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\ldots-\frac{1}{r}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\ldots+\frac{1}{\alpha+r-1}.$$

Следовательно,

$$U_2=\sum_{r=0}^{\infty}u_r=\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,(\alpha-m)!}\times$$
$$\times\,{}_1F_1(\alpha,\,m,\,x)\,[\ln x-\mathcal{F}(m-1)-\mathcal{F}(0)+\mathcal{F}(\alpha-1)]+U_3,$$

где

$$U_3=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,(\alpha-m)!}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)}{r!\,m(m+1)\ldots(m+r-1)}\,x^r\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\ldots+\frac{1}{\alpha+r-1}-\frac{1}{1}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-\frac{1}{r}-\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}-\ldots-\frac{1}{m+r-1}\right).$$

и

$$U=(\alpha,\,m,\,x)=U_1+U_2.$$

Это решение было получено Стоунли [4] *). В функции U, частично затабулированной Веббом и Эйри [6], опущен член U_1.

При $m=1$ член U_1 отсутствует.

Если α — положительное целое число, меньшее m, то функция U сводится к U_1. В этом случае, а также при α целом отрицательном или равном нулю функция U точно определяется формулой **23.04** (26).

При целом отрицательном γ или $\gamma=0$ сходящийся ряд для U можно получить аналогичным способом, но основной случай, встречающийся в практике, будет рассмотрен в **23.07.**

23.06. Преобразование Уиттекера. Если в исходном дифференциальном уравнении

$$xu''+(\gamma-x)\,u'-\alpha u=0 \qquad (1)$$

положить

$$u=ve^{1/2x}, \qquad (2)$$

то получим

$$v''+\frac{\gamma}{x}\,v'+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\gamma-2\alpha}{2x}\right)v=0. \qquad (3)$$

*) Соответствующее разложение функции Уиттекера см. в [5].

Дальнейшая подстановка

$$v = x^{-1/2\gamma} w \tag{4}$$

дает

$$w'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\gamma - \alpha\right)}{x} + \frac{\gamma(2-\gamma)}{4x^2} \right] w = 0. \tag{5}$$

Полагая

$$w = x^{1/2} y, \tag{6}$$

получаем уравнение в виде

$$x \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) - \left[\frac{1}{4} x^2 - \left(\frac{1}{2}\gamma - \alpha\right) x + \frac{1}{4}(\gamma - 1)^2\right] y = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) интересно тем, что при $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$ оно сводится к уравнению типа Бесселя и его решениями служат функции $I_{\pm 1/2\,(\gamma-1)}\left(\frac{1}{2} x\right)$. Следовательно,

$${}_1F_1(\alpha,\ 2\alpha,\ x) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)!\, e^{1/2 x} \left(\frac{4}{x}\right)^{\alpha - 1/2} I_{\alpha - 1/2}\left(\frac{1}{2} x\right). \tag{8}$$

Если же член с x в уравнении (7) отличен от нуля, то это может привести к коренному изменению характера решений. Очевидно, что при условии $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$ функция $\mathrm{Kh}_{1/2\,(\gamma-1)}\left(\frac{1}{2} x\right)$ будет другим решением уравнения (7), соответствующим решению U. Но если это условие не выполняется, то можно найти такие α и γ, что U будет кратным одному из решений U_1 или U_2. Аналогичное утверждение для функций Бесселя состоит в том, что функция Kh_n может быть пропорциональной I_n или I_{-n}!.

Уравнение (5) имеет вид уравнения Уиттекера, которое он сам записал в форме

$$w'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2} \right) w = 0, \tag{9}$$

так что

$$k = \frac{1}{2}\gamma - \alpha, \qquad m = \frac{1}{2}(1 - \gamma). \tag{10}$$

Эти обозначения несколько упрощают запись дифференциального уравнения. Если пытаться найти решение (3), (5) или (7) при произвольных γ и α в виде ряда, то получатся соотношения, связывающие по три коэффициента, и для любого подходящего ряда окажется, что α и γ явно входят в решение. Поэтому решения уравнения (5) будем записывать в виде

$$e^{-1/2 x}\, x^{1/2\gamma}\, [{}_1F_1(\alpha,\ \gamma,\ x);\ x^{1-\gamma}\, {}_1F_1(1 + \alpha - \gamma,\ 2 - \gamma,\ x);\ U(\alpha,\ \gamma,\ x)]. \tag{11}$$

Решения уравнения (7) содержат дополнительный множитель $x^{-1/2}$, и поэтому, если исключить случай $\gamma = 1$, один из рядов дает решение, стремящееся к бесконечности при $x \to 0$.

Другой вид уравнения (5) получается, если положить $x = 2\mu z$. В этом случае имеем

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left[-\mu^2 + (\gamma - 2\alpha)\frac{\mu}{z} + \frac{\gamma(2-\gamma)}{4z^2}\right] w = 0. \qquad (12)$$

Во многих приложениях μ равно ± 1 или $\pm i$.

Особый интерес представляет случай, когда требуется найти решение уравнения (5), стремящееся к нулю при $x = +\infty$ и, кроме того, малое по сравнению с $x^{1/2}$ при малых x. В силу первого условия искомым решением должно быть то, которое выражается через U. Но функция U — линейная комбинация двух решений уравнения (1), одно из которых в окрестности $x = 0$ ограничено и отлично от нуля, а другое ведет себя как $x^{1-\gamma}$. Исключение представляет случай $\gamma = 1$, когда второе решение ведет себя как $\ln x$. Соответствующие решения уравнения (5) ведут себя как $x^{1/2\gamma}$ и $x^{1-1/2\gamma}$ или как $x^{1/2}$ и $x^{1/2} \ln x$. Следовательно, при $\gamma \geqslant 1$ пригодно только то решение уравнения (1), которое принимает при $x = 0$ конечное значение, а при $\gamma < 1$ — решение, которое ведет себя как $x^{1-\gamma}$. В первом случае ${}_1F_1(\alpha, \gamma, x)$ — подходящее решение. Но при больших x оно возрастает как e^x, причем исключение представляет случай, когда $\alpha - 1$ целое отрицательное, т. е. когда ряд обрывается на члене с $x^{-\alpha}$. Во втором случае имеем решение $x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, x)$, которое возрастает как e^x, если только не оказывается, что $\alpha - \gamma$ целое отрицательное и ряд обрывается на члене с $x^{\gamma-\alpha-1}$. В любом случае допустимое решение уравнения (5) представляет собой обрывающийся ряд, умноженный на $e^{-1/2x}$.

Поэтому функция U имеет большое значение в физических задачах. Решение Уиттекера имеет вид

$$W_{k,m}(x) = \frac{x^{-m+1/2}\, e^{-1/2x}}{\left(m-k-\frac{1}{2}\right)!} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{m-k-1/2}\, (t+x)^{m+k-1/2}\, dt =$$

$$= e^{-1/2x}\, x^{1/2\gamma}\, U(\alpha, \gamma, x), \qquad (13)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - m - k, \qquad \gamma = 1 - 2m, \qquad \alpha - \gamma = m - k - \frac{1}{2}. \qquad (14)$$

Мы будем писать

$$M_{k,m}(x) = W(\alpha, \gamma, x), \qquad (15)$$

где для α и γ обозначения прежние. Дифференциальное уравнение Уиттекера не меняется, если x и k заменить на $-x$ и $-k$.

Следовательно, его вторым решением служит $W_{-k,\,m}(x)$. Асимптотическое разложение $W_{k,\,m}(x)$ имеет вид

$$W_{k,\,m}(x)\sim x^k e^{-1/2x}\left\{1+\frac{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{1!\,x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left[m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right]}{2!\,x^2}+\ldots\right\}, \quad (16)$$

причем при неотрицательных целых $m+k-\frac{1}{2}$ и отрицательных целых $m-k+\frac{1}{2}$ ряд обрывается. Для второго решения имеем

$$W_{-k,\,m}(-x)\sim(-x)^k e^{1/2x}\left\{1-\frac{m^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{1!\,x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left[m^2-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[m^2-\left(k+\frac{3}{2}\right)^2\right]}{2!\,x^2}-\ldots\right\}. \quad (17)$$

Здесь ряд обрывается при целых $m+k+\frac{1}{2}\leqslant 0$ и целых $m-k-\frac{1}{2}\geqslant 0$.

23.07. Уравнение Шредингера для водородоподобного атома *). Радиальная волновая функция R удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое можно свести к виду

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(2E+\frac{2Z}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0, \quad (1)$$

где l положительное целое, а Z положительно. Функция R должна быть ограничена при $0\leqslant r<\infty$. Если положить

$$R=\frac{P}{r}, \quad (2)$$

то получим

$$\frac{d^2P}{dr^2}+\left(2E+\frac{2Z}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)P=0. \quad (3)$$

Если E отрицательно (связанный электрон), то положим $2E=-\frac{1}{4}\varkappa^2$, $\varkappa r=\rho$. Тогда получим

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2Z}{\varkappa\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)P=0. \quad (4)$$

*) Ситон [7] дал сводку обычно используемых решений этого уравнения и их асимптотических разложений. Соответствующие таблицы имеются в [8, 9].

Это уравнение Уиттекера с параметрами

$$\gamma = -2l, \quad \alpha = -l - \frac{2Z}{\varkappa}. \tag{5}$$

При $\rho = 0$ показатели равны $l+1$ и $-l$. Второе решение исключается как непригодное, и, следовательно, искомое решение имеет вид

$$P = e^{-1/2\,\rho}\rho^{l+1}\,{}_1F_1\left(1 + l - \frac{2Z}{\varkappa},\ 2l+2,\ \rho\right). \tag{6}$$

При больших ρ оно растет как $\exp\left(\frac{1}{2}\rho\right)$, если ряд не обрывается [ср. **23.04** (9)], т. е. если $1 + l - 2Z/\varkappa$ не равно нулю или отрицательному целому числу. Отсюда следует, что

$$\varkappa = \frac{2Z}{l+s+1} = \frac{2Z}{n}, \tag{7}$$

где s — неотрицательное целое число. Величина n называется главным квантовым числом. Тогда

$$E = -\frac{1}{8}\varkappa^2 = -\frac{1}{2}\frac{Z^2}{n^2} \quad (n = l+1,\ l+2,\ \ldots), \tag{8}$$

$$R \sim \rho^l e^{-1/2\,\rho}\,{}_1F_1(-s,\ 2l+2,\ \rho). \tag{9}$$

В этом случае операционное выражение многочленов имеет компактный вид. При целых $\gamma \geqslant 1$ из **23.03** (4) имеем

$$x^{\gamma-1}\,{}_1F_1(-s,\ \gamma,\ x) = (\gamma-1)!\left(1 - \frac{1}{p}\right)^s p^{1-\gamma} = (\gamma-1)!\,(p-1)^s\,p^{1-\gamma-s}. \tag{10}$$

Но

$$F(p-\alpha)\,1 = e^{\alpha x}F(p)\,e^{-\alpha x}, \tag{11}$$

и поэтому получаем

$$x^{\gamma-1}\,{}_1F_1(-s,\ \gamma,\ x) = (\gamma-1)!\,e^x\frac{p^s}{(p+1)^{\gamma+s-1}}e^{-x} =$$

$$= (\gamma-1)!\,e^x\frac{p^{s+1}}{(p+1)^{\gamma+s}} = (\gamma-1)!\,e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^s\frac{x^{\gamma+s-1}}{(\gamma+s-1)!}e^{-x}. \tag{12}$$

Многочлены

$$L_s(x) = e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^s(x^s e^{-x}) \tag{13}$$

называются *многочленами Лагерра* [10, 11]. Далее имеем

$$\rho^l e^{-1/2\,\rho}\,{}_1F_1(-s, 2l+2, \rho) = \rho^l e^{-1/2\rho}\rho^{-2l-1}(2l+1)!\,e^\rho\left(\frac{d}{d\rho}\right)^s\frac{\rho^{2l+s+1}}{(2l+s+1)!}e^{-\rho} =$$

$$= (2l+1)!\,\rho^{-l-1}e^{1/2\,\rho}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^s\frac{\rho^{2l+s+1}}{(2l+s+1)!}e^{-\rho}. \tag{14}$$

Записывая $\frac{d}{d\rho} \equiv D$, получим

$$L_s(\rho) = (D-1)^s\rho^s, \tag{15}$$

и тогда (14) равно

$$\frac{(2l+1)!}{(2l+s+1)!}\rho^{-l-1}e^{-\frac{1}{2}\rho}(D-1)^s\rho^{2l+s+1}. \tag{16}$$

Если L_{2l+s+1}^{2l+1} обозначает $(2l+1)$-ю производную $(2l+s+1)$-го многочлена Лагерра, то

$$L_{2l+s+1}^{2l+1}=D^{2l+1}(D-1)^{2l+s+1}\rho^{2l+s+1}. \tag{17}$$

Сравнение коэффициентов показывает, что выражение (16) равно

$$-\frac{s!\,(2l+1)!}{[(2l+s+1)!]^2}\rho^l e^{-\frac{1}{2}\rho}L_{2l+s+1}^{2l+1}. \tag{18}$$

Если E положительно (свободный электрон), то мы должны заменить $\varkappa$ на $i\varkappa$. Но теперь при больших r экспоненциальный множитель принимает вид $\exp(i\varkappa r)$ и перестает неограниченно возрастать при больших действительных r. Дифференциальное уравнение теперь при $E=\frac{1}{8}\varkappa^2$ и $i\varkappa r=\rho$ имеет вид

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}+\left(-\frac{1}{4}-\frac{2iZ}{\varkappa\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)P=0. \tag{19}$$

Искомое решение теперь можно записать как

$$P=e^{-\frac{1}{2}i\varkappa r}(\varkappa r)^{l+1}\,{}_1F_1\left(1+l+\frac{2iZ}{\varkappa},\ 2l+2,\ i\varkappa r\right). \tag{20}$$

Здесь α — комплексное, а $i\varkappa r$ — чисто мнимое. Следовательно, в асимптотическом разложении для больших r нужно сохранять оба ряда в формуле **23.04** (8). Имеем

$$P\sim e^{-\frac{1}{2}i\varkappa r}(\varkappa r)^{l+1}\left[\frac{(2l+1)!}{(l+2iZ/\varkappa)!}(ir\varkappa)^{-l-1+2iZ/\varkappa}e^{i\varkappa r}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2l+1)!}{(l-2iZ/\varkappa)!}(i\varkappa r)^{-l-1-2iZ/\varkappa}e^{i\pi\,(l+1+2iZ/\varkappa)}\right]. \tag{21}$$

Величину $i\varkappa r$ нужно рассматривать как $\varkappa r\exp\left(\frac{1}{2}\pi i\right)$. Тогда

$$P\sim(2l+1)!\,e^{-\pi Z/\varkappa}\left[\frac{(\varkappa r)^{2iZ/\varkappa}}{(l+2iZ/\varkappa)!}e^{\frac{1}{2}i\varkappa r-\frac{1}{2}\pi i\,(l+1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\varkappa r)^{-2iZ/\varkappa}}{(l-2iZ/\varkappa)!}e^{-\frac{1}{2}i\varkappa r+\frac{1}{2}\pi i\,(l+1)}\right], \tag{22}$$

$$P\sim\frac{2(2l+1)!\,e^{-\pi Z/\varkappa}}{|(l+2iZ/\varkappa)!|}\cos\left[\frac{1}{2}\varkappa r-\frac{1}{2}\pi(l+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{2Z}{\varkappa}\ln(\varkappa r)-\arg(l+2iZ/\varkappa)!\right], \tag{23}$$

где коэффициент не зависит от r *).

*) См. [12], где $\varkappa$ соответствует $\frac{1}{2}\varkappa$ в принятых здесь обозначениях.

Решение (20) можно преобразовать к другому виду. Оно эквивалентно

$$e^{-1/2 i\varkappa r}(\varkappa r)^{l+1}\frac{(2l+1)!}{2\pi i}\int\limits_M e^{\lambda}\frac{\lambda^{2iZ/\varkappa-l-1}}{(\lambda-i\varkappa r)^{2iZ/\varkappa+l+1}}d\lambda. \tag{24}$$

Далее, уравнение (19) не изменится, если вместо l подставить $-l-1$. Этот факт наводит на мысль рассмотреть выражение

$$e^{-1/2 i\varkappa r}(\varkappa r)^{-l}\frac{(2l+1)!}{2\pi i}\int\limits_M e^{\lambda}\lambda^{2iZ/\varkappa+l}(\lambda-i\varkappa r)^{-2iZ/\varkappa+l}d\lambda. \tag{25}$$

Разлагая подынтегральное выражение по убывающим степеням λ и интегрируя, находим, что выражение (25) равно

$$(-i)^{2l+1}e^{-1/2 i\varkappa r}(\varkappa r)^{l+1}\frac{\left(-\frac{2iZ}{\varkappa}+l\right)!}{\left(-\frac{2iZ}{\varkappa}-l-1\right)!}\,{}_1F_1\left(1+l+\frac{2iZ}{\varkappa},\ 2l+2,\ i\varkappa r\right). \tag{26}$$

Следовательно, (20) отличается от (25) на постоянный действительный множитель. Следует отметить, что решение (20) действительно.

23.08. Параболическая цилиндрическая функция, функция Эрмита и функция Hh. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(A-Bx^2)y=0, \tag{1}$$

в котором A и B действительны. Очевидно, что все его решения — целые функции x. Положим $\xi=x^2$, $y=\xi^{-1/4}z$. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}+\left(-\frac{1}{4}B+\frac{A}{4\xi}+\frac{3}{16\xi^2}\right)z=0, \tag{2}$$

совпадающее с обобщенным уравнением Уиттекера **23.06** (12), параметры которого

$$\mu=\frac{1}{2}\sqrt{B},\quad \nu=\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{1}{4}\left(1-\frac{A}{\sqrt{B}}\right). \tag{3}$$

Решениями уравнения (1) служат

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}B^{1/2}x^2\right)\left[{}_1F_1\left(\alpha,\ \tfrac{1}{2},\ B^{1/2}x^2\right);\ x\,{}_1F_1\left(\tfrac{1}{2}+\alpha,\ \tfrac{3}{2},\ B^{1/2}x^2\right);\right.$$
$$\left.U\left(\alpha,\ \tfrac{1}{2},\ B^{1/2}x^2\right)\right]. \tag{4}$$

Три других решения получаются из них переменой знака у $\sqrt{B}$. Естественно, что только два из этих шести решений могут быть независимыми. В частности, если выбрать положительный знак у $\sqrt{B}$ и положить

$$\alpha' = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{A}{\sqrt{B}}\right), \tag{5}$$

то

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}B^{1/2}x^2\right){}_1F_1\left(\alpha, \tfrac{1}{2}, B^{1/2}x^2\right) = \\ = \exp\left(\tfrac{1}{2}B^{1/2}x^2\right){}_1F_1\left(\alpha', \tfrac{1}{2}, -B^{1/2}x^2\right), \tag{6}$$

$$x\exp\left(-\tfrac{1}{2}B^{1/2}x^2\right){}_1F_1\left(\tfrac{1}{2}+\alpha, \tfrac{3}{2}, B^{1/2}x^2\right) = \\ = x\exp\left(\tfrac{1}{2}B^{1/2}x^2\right){}_1F_1\left(\tfrac{1}{2}+\alpha', \tfrac{3}{2}, -B^{1/2}x^2\right). \tag{7}$$

Действительно, выражения в обеих частях (6) четные решения, а в (7) нечетные. Кроме того, при $x \to 0$ отношение правой и левой частей каждого уравнения стремится к единице. Формулы (6) и (7) следуют также из формулы **23.03** (10).

Три особенно важных случая различаются знаками A и B. Во-первых, уравнения **18.04** (7), (8), которым удовлетворяют параболические цилиндрические функции, имеют вид (1). Чтобы их решения при больших ξ_1 или ξ_2 были осциллирующими, как было установлено в **18.04**, должно быть $\varkappa^2 > \mu^2$ и, следовательно, B должно быть отрицательным. В теории приливов этому случаю соответствует задача о гармоническом движении, заданном на большом расстоянии от мыса параболической формы или у входа в длинный залив параболического очертания. Следовательно, параболические цилиндрические функции можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции мнимого аргумента. При A действительных α комплексные. Но само решение, как и в случае волнового уравнения для свободных электронов в поле ядра, действительно. То же самое дифференциальное уравнение возникает в квантовой механике при силах отталкивания, линейно возрастающих с расстоянием.

Постоянная B положительна в квантовомеханической задаче о линейном осцилляторе. В теории приливов и в акустике B положительно в случае локальных возмущений, вызываемых выступом параболического очертания. В этих задачах в качестве предельного случая получается задача о дифракции на полубесконечном экране — одна из немногих дифракционных задач, для которых найдено точное решение [13]. Если требуется найти решение, стремящееся к нулю при $x \to \pm\infty$, то линейная комбинация четного и нечетного решений может удовлетворять

этому условию только в том случае, когда один из коэффициентов равен нулю. Тогда решение с коэффициентом, отличным от нуля, должно сводиться к многочлену, умноженному на экспоненциальную функцию. Следовательно, 2α должно быть целым неположительным. Именно к этому случаю относится уравнение Шредингера для линейного осциллятора.

При положительных целых 2α одно из решений также сводится к элементарной функции. Действительно, $\alpha + \alpha' = {}^1/_2$, и тогда один из рядов в правой части (6), (7) сводится к многочлену. Но в данном случае многочлен умножается на $\exp\left(\frac{1}{2} B^{1/2} x^2\right)$, и это элементарное решение обычно оказывается непригодным. Однако при помощи функции U можно найти решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Это не будет элементарная функция. Но к такому же типу относятся функции, возникающие в одномерных и трехмерных задачах теплопроводности, и функции Hh_n при $n \geqslant 0$, которые играют важную роль в статистике.

Эти решения легко получаются при помощи функции U и ее операционного выражения. Поскольку

$$p^{1/2} \exp(-ap^{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-a^2/4t} \tag{8}$$

и из **21.08** (13)

$$\mathrm{Kh}_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{-x}, \tag{9}$$

имеем

$$p^{n+1/4}\, \mathrm{Kh}_{1/2}(ap^{1/2}) = p^{n+1/4} \left(\frac{2}{\pi a p^{1/2}}\right)^{1/2} e^{-ap^{1/2}} = \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} p^n e^{-ap^{1/2}}. \tag{10}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial a}\, e^{-ap^{1/2}} = -\, p^{1/2} e^{-ap^{1/2}}, \tag{11}$$

$$\int_a^\infty e^{-ap^{1/2}}\, da = p^{-1/2} e^{-ap^{1/2}}, \tag{12}$$

и поэтому если $2m$ — неотрицательное целое число, то

$$p^{m+1/2} e^{-ap^{1/2}} = (-1)^{2m} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{2m} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-a^2/4t}, \tag{13}$$

а если $2m$ — целое отрицательное число или нуль, то

$$p^{m+1/2} e^{-ap^{1/2}} = \left(\int_a^\infty da\right)^{-2m} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-a^2/4t}. \tag{14}$$

Далее из **23.05** (6) имеем

$$U\left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{a^2}{4t}\right) = \pi e^{a^2/4t}\left(\frac{1}{2}a\right)^{1/2} t^{1/2-\alpha} p^{3/4-\alpha}\,\mathrm{Kh}_{1/2}(ap^{1/2}) =$$

$$= \pi^{1/2} e^{a^2/4t} t^{1/2-\alpha} p^{1/2-\alpha} e^{-ap^{1/2}}. \quad (15)$$

Положим $\alpha = -m$. Тогда если 2α — целое отрицательное или нуль, то имеем

$$U\left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{a^2}{4t}\right) = \pi^{1/2} e^{a^2/4t} t^{1/2-\alpha} (-1)^{2\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{-2\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} =$$

$$= t^{-\alpha} e^{a^2/4t} (-1)^{2\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{-2\alpha} e^{-a^2/4t}, \quad (16)$$

$$U\left(\alpha, \frac{1}{2}, B^{1/2}x^2\right) = (-1)^{2\alpha} (2B^{1/4})^{2\alpha} e^{B^{1/2}x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-2\alpha} e^{-B^{1/2}x^2}. \quad (17)$$

Эти решения называются *многочленами Эрмита*. Если их умножить на $\exp\left(-\frac{1}{2}B^{1/2}x^2\right)$, то они станут решениями уравнения (1). При заданном α, где 2α — целое отрицательное или нуль, функция (17) — единственное решение, которое стремится к нулю при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Если 2α не является целым отрицательным или нулем, то нет решений, которые стремятся к нулю и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

Если 2α — целое положительное, то имеем

$$U\left(\alpha, \frac{1}{2}, \frac{a^2}{4t}\right) = \pi^{1/2} e^{a^2/4t} t^{1/2-\alpha} \left(\int_a^\infty da\right)^{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}, \quad (18)$$

$$U\left(\alpha, \frac{1}{2}, B^{1/2}x^2\right) = (2B^{1/4})^{2\alpha} e^{B^{1/2}x^2} \left(\int_x^\infty dx\right)^{2\alpha} e^{-B^{1/2}x^2}. \quad (19)$$

Таким образом, в зависимости от знака α решения могут быть построены последовательным интегрированием или дифференцированием. Решения непосредственно в виде (16) и (18) удобны в задачах диффузии (включая и задачи теплопроводности). Для других целей, вероятно, лучше пользоваться таблицами, имеющимися в [14]. Однако дополнительная таблица более элементарных функций с меньшим шагом и с четырьмя или пятью знаками была бы весьма полезна.

Четырехзначная таблица родственных функций $\mathrm{i}\,\mathrm{erf}\,x = \int_x^\infty (1 - \mathrm{erf}\,w)\,dw$ и $\mathrm{ii}\,\mathrm{erf}\,x = \int_x^\infty \mathrm{i}\,\mathrm{erf}\,w\,dw$ дана Хартри [15] [см. **20.06** (9)].

23.08а. Волновые задачи. Прохождение и отражение волн. Решениями уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} + h^2(z^2 - c^2)y = 0 \tag{1}$$

служат

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}ihz^2\right)(U, V)\left(\alpha, \tfrac{1}{2}, ihz^2\right), \quad \alpha = \tfrac{1}{4}(1 - ihc^2). \tag{2}$$

Если при $\gamma > 0$ временно́й множитель имеет вид $e^{i\gamma t}$, то при $z > 0$ функция $U\exp\left(i\gamma t - \frac{1}{2}ihz^2\right)$ описывает бегущую волну. При $z < 0$ это решение принимает вид

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}ihz^2\right) U\left(\alpha, \tfrac{1}{2}, ihz^2e^{2i\pi}\right). \tag{3}$$

Из **23.04** (25) и **23.05** (23) можно найти, что при $|\arg x| < \pi$ имеет место

$$U(xe^{2i\pi}) = \frac{2\pi i e^{-i\gamma\pi}}{(\alpha-1)!\,(\alpha-\gamma)!} V(x) + (2e^{-i\gamma\pi}\cos\gamma\pi - e^{2i(\alpha-\gamma)\pi})\,U(x). \tag{4}$$

Отсюда следует, что выражение (3) равно

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}ihz^2\right)\left[\frac{2\pi i e^{-1/2 i\pi}}{(\alpha-1)!\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)!} V\left(\alpha, \tfrac{1}{2}, ihz^2\right) - \right.$$

$$\left. - e^{2i\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\pi} U\left(\alpha, \tfrac{1}{2}, ihz^2\right)\right] = \tag{5}$$

$$= \exp\left(-\tfrac{1}{2}ihz^2\right)\left[\frac{2\pi}{(\alpha-1)!\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)!} V + ie^{1/2 hc^2\pi} U\right]. \tag{6}$$

Модули коэффициентов равны $(1 + e^{hc^2\pi})^{1/2}$, $e^{1/2 hc^2\pi}$. Член, содержащий V, описывает при $z < 0$ падающую волну, так как его фаза убывает при увеличении $|z|$. Таким образом, амплитуды падающей, отраженной и проходящей волн относятся как *)

$$(1 + e^{hc^2\pi})^{1/2}, \quad e^{1/2 hc^2\pi}, \quad 1.$$

23.081. При целом $n \geqslant 0$

$$\mathrm{Hh}_n(x) = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!}\exp\left[-\tfrac{1}{2}(t+x)^2\right]dt = \int_x^\infty \frac{(u-x)^n}{n!} e^{-1/2 u^2}\,du, \tag{1}$$

*) Этот результат нам сообщил Хединг, который получил его другим способом.

а при отрицательном целом n

$$\mathrm{Hh}_n(x) = (-1)^{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n-1} e^{-1/2x^2}. \tag{2}$$

В частности,

$$\mathrm{Hh}_0(x) = \int_x^\infty e^{-1/2u^2}\,du, \quad \mathrm{Hh}_0(-\infty) = \sqrt{2\pi}, \tag{3}$$

$$\mathrm{Hh}_{-1}(x) = e^{-1/2x^2}. \tag{4}$$

Очевидно, что для всех n

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Hh}_n(x) = -\mathrm{Hh}_{n-1}(x), \tag{5}$$

и легко показать, что функция $\mathrm{Hh}_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - ny = 0. \tag{6}$$

Эти функции удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(n+1)\,\mathrm{Hh}_{n+1}(x) + x\,\mathrm{Hh}_n(x) - \mathrm{Hh}_{n-1}(x) = 0. \tag{7}$$

Если положить

$$y = e^{-1/4x^2}z, \tag{8}$$

то для всех целых n, положительных или отрицательных, найдем

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2\right)z = 0. \tag{9}$$

Это уравнение можно свести к виду **23.08** (1) подстановкой

$$x = (4B)^{-1/4}\eta. \tag{10}$$

Тогда решение уравнения **23.08** (1), интересовавшее нас в рассмотренных случаях, можно написать в компактном виде

$$e^{1/4\eta^2}\,\mathrm{Hh}_n(\eta) \tag{11}$$

при любом целом n, положительном или отрицательном, и

$$A = -(2n+1)\sqrt{B}. \tag{12}$$

Функция $D_n(x)$ для положительных n определяется равенством

$$D_n(x) = e^{1/4x^2}\,\mathrm{Hh}_{-n-1}(x) = e^{1/4x^2}(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-1/2x^2}. \tag{13}$$

Очевидно, что она имеет n действительных нулей. Кроме того, она удовлетворяет условию ортогональности, что и следовало

ожидать, так как эта функция появляется как решение волнового уравнения. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_m(x)\,D_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{1/2x^2}(-1)^{m+n}\left(\frac{d^m}{dx^m}e^{-1/2x^2}\right)\left(\frac{d^n}{dx^n}e^{-1/2x^2}\right)dx =$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2x^2}\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{1/2x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-1/2x^2}\right)dx. \quad (14)$$

Если $m \neq n$, то можно принять, что m больше n. Тогда функция, которую нужно дифференцировать m раз, — многочлен степени n, и производная равна нулю. Следовательно, интеграл равен нулю, если только m не равно n. Если $m = n$, то членом высшей степени является $(-1)^n x^n$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} [D_n(x)]^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} n!\,e^{-1/2x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,n!. \quad (15)$$

При $n \geqslant 0$ все функции Hh_n положительны и вопрос об ортогональности не возникает.

Функция $\mathrm{Hh}_n(x)$ выражается через решения уравнения (6) в виде рядов

$$\mathrm{Hh}_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,2^{-1/2n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^{1/2m}x^m}{m!\left[\frac{1}{2}(n-m)\right]!} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{2^{1/2n}\left(\frac{1}{2}n\right)!}\left[1+\frac{nx^2}{2!}+\frac{n(n-2)x^4}{4!}+\ldots\right] -$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{2^{1/2n-1/2}\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)!}x\left[1+\frac{(n-1)x^2}{3!}+\frac{(n-1)(n-3)x^4}{5!}+\ldots\right]. \quad (16)$$

23.082. Асимптотическое разложение для $\mathrm{Hh}_n(x)$ при больших x и $n>0$. Из 23.081 (1) следуют формулы

$$\mathrm{Hh}_n(x) = \frac{e^{-1/2x^2}}{n!}\int_0^{\infty} t^n e^{-tx-1/2t^2}\,dt, \quad (1)$$

$$\mathrm{Hh}_n(x) = \frac{e^{-1/2x^2}}{n!}\int_0^{\infty} e^{-tx}\sum(-1)^m\frac{t^{2m+n}}{2^m m!}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,x>0), \quad (2)$$

$$\mathrm{Hh}_n(x) \sim \frac{e^{-1/2x^2}}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m+n)!}{2^m m!}\frac{1}{x^{2m+n+1}}. \quad (3)$$

$$\mathrm{Hh}_n(-x)+(-1)^n\,\mathrm{Hh}_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n\left(e^{-1/2\,(t-x)^2}+(-1)^n e^{-1/2\,(t+x)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-1/2\,(1-x)^2}\,dt=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}(x+u)^n e^{-1/2u^2}\,du=$$

$$=\sum_{m=0}{}'\frac{2^{1/2\,(m+1)}\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)!}{m!\,(n-m)!}\,x^{n-m}, \qquad (4)$$

причем суммирование производится по четным $m\leqslant n$. Последнее соотношение — точное, но оно приводится вместе с асимптотической формулой, так как правая часть расположена по убывающим степеням x. Оно полезно для оценки $\mathrm{Hh}_n(-x)$ при больших x, так как в этом случае функция $\mathrm{Hh}_n(x)$ мала.

23.083. Асимптотическое разложение для $\mathrm{Hh}_n(x)$ при больших положительных n и умеренных x. Функция $\mathrm{Hh}_n(x)$ очень мала при x, превышающих примерно 3, причем n может быть большим. Тогда если

$$\varphi(t)=n\ln t-tx-\frac{1}{2}t^2, \qquad (5)$$

то

$$\varphi'(t)=\frac{n}{t}-x-t, \qquad (6)$$

$$\varphi''(t)=-\frac{n}{t^2}-1. \qquad (7)$$

Тогда при больших n и умеренных x условие $\varphi'(t)=0$ дает в качестве первого приближения $t=n^{1/2}-x$ и $\varphi''(t)=-2$. Отсюда

$$\varphi(n^{1/2})=\frac{1}{2}n\ln n-n^{1/2}x-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}x^2 \qquad (8)$$

и

$$\mathrm{Hh}_n(x)\sim\frac{e^{-1/4x^2}}{n!}\sqrt{\pi}\,n^{1/2n}e^{-1/2n-x\sqrt{n}}. \qquad (9)$$

Полагая $x=0$ и применяя формулу Стирлинга, мы восстанавливаем первый член разложения по обратным степеням n. Таким образом, осуществляется проверка асимптотической формулы.

23.084. Асимптотическое разложение для $D_n(x)$ при больших n. Проще всего его можно найти из дифференциального уравнения **23.081** (9), в котором n заменено на $-n-1$, т. е. из уравнения

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)z=0. \qquad (1)$$

Положим

$$n+\frac{1}{2}=m, \quad x=2\sqrt{m}\,\xi. \tag{2}$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}+4m^2(1-\xi^2)z=0. \tag{3}$$

Его решения имеют экспоненциальный характер при $\xi>1$ и $\xi<-1$ и осциллируют при $\xi^2<1$. Имеем

$$2m\int_{\xi}^{1}\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi=m\left(\frac{1}{2}\pi-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \quad (\xi=\sin\theta), \tag{4}$$

$$2m\int_{1}^{\xi}\sqrt{\xi^2-1}\,d\xi=m\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2u-u\right) \quad (\xi=\operatorname{ch}u). \tag{5}$$

Тогда решение, экспоненциально убывающее при $\xi\to+\infty$, имеет вид

$$\frac{1}{(\xi^2-1)^{1/4}}\exp\left[-m\xi(\xi^2-1)^{1/2}\right]\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)^m \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{2}{(1-\xi^2)^{1/4}}\sin\left[m\left(\frac{1}{2}\pi-\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\frac{1}{4}\pi\right]. \tag{6}$$

Постоянный множитель определяется из того, что при больших x функция $D_n(x)$ асимптотически равна $x^n\exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right)$. Отсюда видно, что он равен

$$2^{-1/2}m^{1/2m}e^{-1/2m}\doteqdot 2^{-1/2}n^{1/2n}e^{-1/2n}. \tag{7}$$

Проверка получается, если положить $x=0$ и, следовательно, $\theta=0$. Очевидно, что $D_n(0)=0$ для нечетных n. Для четных n правая часть (6) равна ± 2. Но для четных n имеем

$$\pm D_n(0)=\frac{d^n}{dx^n}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{1/2n}}{\left(\frac{1}{2}n\right)!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2n}n!}{\left(\frac{1}{2}n\right)!}\sim\sqrt{2}\,n^{1/2n}e^{-1/2n}. \tag{8}$$

Следовательно, для получения асимптотической формулы для $D_n(x)$ с точностью до $O(1/n)$ обе части (6) нужно умножить на

$$2^{-1/2}\left(\frac{n}{e}\right)^{1/2n}. \tag{9}$$

23.09. Точность формул, полученных методом наискорейшего спуска. Асимптотическая формула для $\mathrm{Hh}_n(x)$ при больших n

открывает путь для оценки ошибки, допускаемой при асимптотическом разложении, получаемом методом наискорейшего спуска, если обрывать ряд на наименьшем члене. В формуле

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 a^2 z^2} f(z)\, dz \tag{1}$$

положим $f(z) + f(-z) = g(z)$. Тогда $g(z)$ — четная функция и

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-1/2 a^2 z^2} g(z)\, dz. \tag{2}$$

Проинтегрируем по частям $2n$ раз. Тогда, учитывая, что нечетные $g^{(m)}(z)$ при $z = 0$ обращаются в нуль, получим

$$I = \frac{1}{a} g(0)\,\mathrm{Hh}_0(0) + \frac{g''(0)}{a^3}\mathrm{Hh}_2(0) + \ldots + \frac{g^{(2n)}(0)}{a^{2n+1}}\mathrm{Hh}_{2n}(0) + R_{2n}, \tag{3}$$

где

$$R_{2n} = \frac{1}{a^{2n+1}} \int_0^{\infty} \mathrm{Hh}_{2n}(az)\, g^{(2n+1)}(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{a^{2n+2}} \int_0^{\infty} \mathrm{Hh}_{2n+1}(az)\, g^{(2n+2)}(z)\, dz. \tag{4}$$

Далее, пусть $re^{i\alpha}$ — особая точка функции $f(z)$ с наименьшим модулем. Тогда функция $g(z)$ имеет особые точки $\pm re^{i\alpha}$. Предположим, что вблизи этих точек $g(z)$ ведет себя как отрицательная степень или логарифм. Вклад в $g(z)$ от этих точек должен иметь вид

$$\frac{A}{(re^{i\alpha} - z)^m} + \frac{A}{(re^{i\alpha} + z)^m}$$

или

$$A \ln (r^2 e^{2i\alpha} - z^2), \tag{5}$$

где m не зависит от a и n. Предположим, что a настолько велико, что наименьший член разложения соответствует большому n. Тогда для малых z получим формулу

$$g^{(2n)}(z) \doteqdot \frac{(m+2n-1)!}{(m-1)!} A \left[\frac{1}{(re^{i\alpha} - z)^{m+2n}} + \frac{1}{(re^{i\alpha} + z)^{m+2n}} \right] \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{(2n)!\, M}{r^{2n} e^{2n i\alpha}} \operatorname{ch} \frac{2nz}{re^{i\alpha}}, \tag{6}$$

верную в том смысле, что можно так выбрать M, что отношение $g^{(2n)}(z)$ к выражению в правой части (6) стремится к 1 при

больших n. Кроме того, если u_{2n} — общий член (3), то

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} \doteqdot \frac{g^{(2n+2)}(0)}{a^2 g^{(2n)}(0)} \frac{\mathrm{Hh}_{2n+2}(0)}{\mathrm{Hh}_{2n}(0)} \doteqdot \frac{1}{a^2} \frac{(2n+1)(2n+2)}{r^2 e^{2i\alpha}} \frac{1}{2(n+1)} \doteqdot \frac{2n}{a^2 r^2 e^{2i\alpha}}. \quad (7)$$

Поэтому наименьший член определяется условием

$$2n = [r^2 a^2], \quad (8)$$

и

$$R_{2n} \doteqdot \frac{u_{2n}(2n+1)(2n+2)}{r^2 a\, \mathrm{Hh}_{2n}(0)\, e^{2i\alpha}} \int_0^\infty \mathrm{Hh}_{2n+1}(az) \operatorname{ch} \frac{2nz}{re^{i\alpha}}\, dz \doteqdot$$

$$\doteqdot u_{2n} a\, (2n)^{1/2} e^{-2i\alpha} \int_0^\infty \exp\left(-\sqrt{2n}\, az - \frac{1}{4} a^2 z^2\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{2n}\, aze^{-i\alpha}\right) dz. \quad (9)$$

Если n велико и a не мало, то подынтегральное выражение становится малым до того, как член с a^2z^2 станет существенным. Тогда R_{2n} сводится (см. [16]) к выражению

$$R_{2n} \doteqdot u_{2n} e^{-2i\alpha} \int_0^\infty e^{-x} \operatorname{ch}(xe^{-i\alpha})\, dx = \frac{u_{2n} e^{-2i\alpha}}{1 - e^{-2i\alpha}}, \quad (10)$$

$$u_{2n} + R_{2n} \doteqdot \frac{u_{2n}}{1 - e^{-2i\alpha}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \operatorname{ctg} \alpha\right) u_{2n}. \quad (11)$$

Поэтому простое правило, найденное для неполного факториала, по которому требовалось брать половину наименьшего члена, пригодно для разложений по методу наискорейшего спуска только, если $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$. Можно убедиться в этом, показав, что последовательные члены имеют точно противоположные фазы. Если $|\operatorname{ctg}\alpha| > \sqrt{3}$, то R_{2n} превосходит u_{2n} по модулю.

Эти рассуждения весьма грубы, но они служат двум целям. В большинстве случаев оценка ошибки, допущенной при обрывании асимптотического ряда на заданном члене, связана с разложениями специальных функций, причем берется общий член разложения. Изложенный метод имеет большую общность и должен быть пригоден для более общего случая. Видно, что быстрое убывание ошибки при небольшом числе членов получается благодаря быстрому убыванию первых членов разложения $\mathrm{Hh}_n(az)$ при возрастании n или az при большом a. В интервале, где множитель Hh_n имеет существенную величину, производные функции $g(z)$ низких порядков можно приближенно считать постоянными. Но при многократном использовании

интегрирования по частям производные $g^{(2n)}(z)$ все быстрее изменяются при изменении z, хотя множитель Hh_n убывает, и, наконец, при $2n = r^2a^2$ их изменение становится таким же существенным, как и изменение $\mathrm{Hh}_{2n}(az)$. При дальнейших попытках получать приближения тем же способом ничего выиграть не удается. Это объяснение, вероятно, хорошо известно многим математикам. Но, возможно, они не смогли его сформулировать с той точностью, с какой бы им хотелось. Физики же удовлетворяются даже грубыми рассуждениями, если они приводят к результату.

Приближенная формула (11) позволяет оценить остаточный член просто путем рассмотрения членов, близких к наименьшему, причем α определяется непосредственно из сравнения фаз. Формула непригодна при $\alpha = 0$, т. е. когда все члены одного знака. Этого и следовало ожидать, поскольку такой случай означает, что путь интегрирования проходит через особую точку. Трудности встречаются, например, при оценке остатка для функции $I_n(x)$ при действительных x. Путь наискорейшего спуска дважды приходит через дополнительную седловую точку -1, а в ней подынтегральное выражение обращается в бесконечность. Положение удается отчасти спасти благодаря существованию несобственного интеграла, но при этом для интегрирования по частям приходится разбивать интервал интегрирования. В этом случае наше приближение (9) чрезвычайно грубо, но если положить $\alpha = 0$, то получится

$$R_{2n} \doteqdot \tfrac{1}{2} u_{2n} (2n)^{1/2} \int_0^\infty \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{n\pi}\, u_{2n}, \qquad (12)$$

где множитель $\sqrt{n}$ служит предупреждением, что в этом случае величина наименьшего члена не дает надежной оценки точности.

Аналогичные соображения применимы к интегралу

$$I = \int_0^\infty e^{-az} f(z)\, dz = 2\int_0^\infty e^{-a\zeta^2} f(\zeta^2)\, \zeta\, d\zeta. \qquad (13)$$

Используется тот же способ лишь с той разницей, что $\zeta f(\zeta^2)$ — нечетная функция и в нуль обращаются члены с четными производными. Формула (11) остается верной, если $2n$ заменить на $2n-1$.

Более полное изложение предмета настоящей главы читатель найдет в книге Слетера [17].

ПРИМЕРЫ

1. Докажите рекуррентные соотношения:

$$x\,{}_1F_1(\alpha+1,\gamma+1,x)=\gamma\,[{}_1F_1(\alpha+1,\gamma,x)-{}_1F_1(\alpha,\gamma,x)],$$
$$\alpha\,{}_1F_1(\alpha+1,\gamma+1,x)=(\alpha-\gamma)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma+1,x)+\gamma\,{}_1F_1(\alpha,\gamma,x),$$
$$(\alpha+x)\,{}_1F_1(\alpha+1,\gamma+1,x)=(\alpha-\gamma)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma+1,x)+\gamma\,{}_1F_1(\alpha+1,\gamma,x),$$
$$\alpha\gamma\,{}_1F_1(\alpha+1,\gamma,x)=\gamma(\alpha+x)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma,x)-x(\gamma-\alpha)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma+1,x).$$
$$\alpha\,{}_1F_1(\alpha+1,\gamma,x)=(x+2\alpha-\gamma)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma,x)+(\gamma-\alpha)\,{}_1F_1(\alpha-1,\gamma,x),$$
$$(\gamma-\alpha)\,x\,{}_1F_1(\alpha,\gamma+1,x)=\gamma(x+\gamma-1)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma,x)+\gamma(1-\gamma)\,{}_1F_1(\alpha,\gamma-1,x).$$

(B. A. Report, 1926)

2. Докажите, что

$$\exp\left(-\frac{1}{4}x^2+xt-\frac{1}{2}t^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D_n(x).$$

Отсюда получите, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varkappa x}D_n(x)\,dx=2\sqrt{\pi}\,i^nD_n(2\varkappa).$$

3. Докажите, что при действительных a, b, c гипергеометрический ряд при $z=1$ сходится, если $c>a+b$, и расходится если $c<a+b$, а при $z=-1$ сходится, если $c+1>a+b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. A. Reports (Committee for the Calculation of Mathematical Tables), 1926
2. B. A. Report, 1927.
3. *Goldstein S.*, Proc. Lond. Math. Soc., (2) **34**, 103—125 (1931).
4. *Stoneley R.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl., **3**, 226—228 (1934).
5. *Hartree D. R.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **24**, 426—437 (1928).
6. *Webb H. A.*, *Airey J. R.*, Phil. Mag., (6) **36**, 129—141 (1918).
7. *Seaton M. J.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **118**, 504—518 (1958).
8. O. N. R. Technical Reports, № 204, 260, Cruft Laboratory, Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts.
9. Royal Society Mathematical Tables, vol. 11, Coulomb Wave Functions, A. R. Curtis, 1964.
10. *Courant R.*, *Hilbert D.*, Methoden der mathematischen Physik, **1**, 77—79 (1924). (Русский перевод: *Курант Р.*, *Гильберт Д.*, Методы математической физики, т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1951.)
11. *Schrödinger E.*, Ann. Phys., (4) **80**, 437—490 (1926).
12. *Bethe H.*, Handbuch der Physik, Bd. 24/1, S. 289.
13. *Lamb H.*, Hydrodynamics, 1932, p. 538. (Русский перевод: *Ламб Г.*, Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.)
14. British Association Tables, vol. 1.
15. *Hartree D R.*, Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc., **80**, 85—102 (1936).
16. *Airey J. R.*, Phil. Mag., (7) **24**, 526 (1937).
17. *Slater L. J.*, Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge Univ. Press, 1960. (Русский перевод: *Слетер Л. Дж.*, Вырожденные гипергеометрические функции, Изд-во ВЦ АН СССР, М., 1966.)

Глава 24

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Вы варите его в опилках, солите его клеем, сгущаете его белой акацией и тесьмой, имея в виду только одно — сохранить его симметричную форму
Льюис Кэррол, „Охота на Снарка"

24.01. Присоединенные функции Лежандра. Мы уже видели ранее, что решения уравнения потенциала, волнового уравнения и уравнения распространения звука в случае сферических границ зависят от решения уравнения

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\Theta}{d\mu^2}-2(s+1)\mu\frac{d\Theta}{d\mu}+(n-s)(n+s+1)\Theta=0, \qquad (1)$$

в котором $-1\leqslant\mu\leqslant 1$. В задачах теории потенциала для области, внешней по отношению к эллипсоиду вращения, мы имеем дело с этим же дифференциальным уравнением, причем для вытянутого эллипсоида вращения $\mu>1$, а для сплюснутого μ — число чисто мнимое. В этих задачах нам необходимо получить такое решение, которое стремится к 0, когда $\mu\to\infty$. Будем считать n, s целыми числами, если обратное не оговорено, и $n\geqslant s\geqslant 0$; тогда при $\mu=\pm 1$ одно решение будет иметь индекс 0, а другое — s. Последнее решение может содержать логарифм и будет обращаться в бесконечность. Ввиду того что одно решение — нечетная функция от μ, а другое четная функция, решение с индексом 0 при $\mu=1$ будет иметь индекс 0 и при $\mu=-1$ и будет как раз тем решением, которое получается в задачах со сферическими границами. Это решение не имеет других особенностей и поэтому является целой функцией. Можно легко получить решения в виде рядов. В **16.04** они выписаны явно для случая $s=0$. Методом из **18.061** можно получить решения, аналитические в точке $\mu=\pm 1$; они имеют вид

$$\Theta_n^s=\frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n. \qquad (2)$$

Решения, имеющие особенности при $\mu=\pm 1$, получаются из уравнения (1), если в нем положить $s=n$. При этом будем иметь

$$(1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}\Theta_n^n-2(n+1)\mu\frac{d}{d\mu}\Theta_n^n=0. \qquad (3)$$

Одним решением этого уравнения является постоянная, а с помощью последовательного интегрирования можно построить решение в виде полинома для меньших значений s. Но такое решение уже дано в (2) без специального определения постоянных интегрирования. Другое решение имеет вид

$$\frac{d}{d\mu}\Theta_n^n = -\frac{1}{(\mu^2-1)^{n+1}}. \tag{4}$$

Если мы выберем постоянные интегрирования так, чтобы решение стремилось к 0, когда $\mu \to \infty$, то оно будет иметь вид

$$\Theta_n^s = \frac{1}{(n-s)!}\int_{\mu}^{\infty} \frac{(\mu-u)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du, \tag{5}$$

причем путь интегрирования не пересекает действительную ось между точками -1 и $+1$.

Определяющее уравнение для больших μ имеет корни, равные $n-s$ и $-n-s-1$; первый корень соответствует решению (2), а второй оправдывает предположение о том, что для каждого s существует решение, обращающееся в нуль на бесконечности. Легко проверить, что (5) удовлетворяет соотношению

$$\frac{d}{d\mu}\Theta_n^s = \Theta_n^{s+1}, \tag{6}$$

поэтому оно является вторым искомым решением.

Если мы положим $n=s=0$, то получим

$$\Theta^0 = \frac{1}{2}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}. \tag{7}$$

Здесь имеется логарифмическая особенность при $\mu = \pm 1$, и необходимо специальное условие для того, чтобы определить значения функции в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Опуская этот случай, мы можем взять выражение (5) для μ действительных и бóльших 1 и определить значения функции по непрерывности, исключая из рассмотрения действительные значения μ между -1 и $+1$ с помощью разреза. Покажем, что для интервала $-1 < \mu < 1$ можно видоизменить определение решения, но во всех случаях второе решение будет бесконечным при $\mu = \pm 1$.

24.02. Решения уравнения Лапласа в сферических полярных координатах имеют вид

$$\varphi = (r^n,\ r^{-n-1})\sin^s\theta \cdot \Theta \cdot (\cos s\lambda,\ \sin s\lambda), \tag{8}$$

где Θ выражено через (2) или (5) с соответствующим постоянным множителем. На полной сфере для однозначности функции φ необходимо, чтобы при $s=0$ не присутствовал член с λ, который в этом случае заменяет $\sin s\lambda$. Чтобы функция φ была конечна при $\theta=0$ или π, необходимо исключить решение (5). Мы увидим, что любая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри или вне сферы, может быть выражена через сферические гармоники; при этом Θ берется в виде (2).

24.03. Потенциал в полости. Рассмотрим замкнутую поверхность, ограничивающую полость. Внутри нее существует потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Около любой точки этой области можно построить сферу, лежащую целиком внутри области, тогда внутри каждой такой сферы потенциал выражается с помощью интеграла Грина **6.092** (8) через свои значения на поверхности сферы. Пусть $r<a$, тогда

$$\frac{a^2-r^2}{R^3}=\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\vartheta+r^2)^{3/2}}.$$

Если мы будем рассматривать r как комплексное переменное, то эта функция и любая ее производная будут иметь особенности только при $r=ae^{\pm i\vartheta}$ и могут быть разложены в степенные ряды по r, равномерно и абсолютно сходящиеся для $|r|\leqslant c<a$. Но коэффициентами при r^n являются суммы членов вида $(r^2)^m(r\cos\vartheta)^{n-2m}$, а $r\cos\vartheta$ — линейная функция от x, y, z. Следовательно, для любой функции φ, интегрируемой на сфере $r=a$, коэффициенты при r^n могут быть выражены в виде однородных полиномов от x, y, z. Ряд будет равномерно сходящимся по ϑ для $|r|\leqslant c$. Следовательно, функция φ внутри полости может быть выражена в виде суммы ряда однородных полиномов от x, y, z, сходящегося при $r<a$. Производная любого порядка от φ по x, y, z может быть выражена в таком же виде.

Итак, сколь угодно близко от центра мы можем записать φ в виде суммы ряда однородных полиномов от x, y, z:

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ \ldots\ +\varphi_n+\ \ldots, \qquad (1)$$

где φ_n — полином n-й степени. Поскольку во всех точках внутри сферы $\nabla^2\varphi=0$, то, собирая члены одинаковой степени, можно показать, что и $\nabla^2\varphi_n=0$. Таким образом, функция φ может быть выражена в виде ряда полиномов, каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа. Очевидными решениями этого уравнения являются

$$\varphi_0=1;\quad \varphi_1=x,\ y,\ z;\quad \varphi_2=xy,\ yz,\ zx,\ x^2-y^2,\ 2z^2-x^2-y^2.$$

При $z=0$ положим

$$\varphi_n = g(x, y), \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = h(x, y). \tag{2}$$

Функцию φ_n можно представить в виде обрывающегося ряда Тейлора по степеням z. Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \varphi_n &= (-1)^r \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right)^r \varphi_n, \\ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \varphi_n &= (-1)^r \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^r \frac{\partial \varphi_n}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3}$$

т. е. все производные по z при $z=0$ могут быть определены дифференцированием функций $g(x, y)$ и $h(x, y)$.

Обозначим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla_1^2. \tag{4}$$

Тогда

$$\varphi_n = \sum (-1)^m \nabla_1^{2m} g(x, y) \frac{z^{2m}}{(2m)!} + \sum (-1)^m \nabla_1^{2m} h(x, y) \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{5}$$

Отсюда видно, что функция φ_n полностью определяется заданием функций $g(x, y)$ и $h(x, y)$. Функция $g(x, y)$ является полиномом n-й степени и содержит поэтому $n+1$ член, функция $h(x, y)$ — полином степени $n-1$, содержащий n членов. Если мы подставим (5) в $\nabla^2 \varphi_n$, причем коэффициенты полиномов $g(x, y)$ и $h(x, y)$ произвольные, получим, что $\nabla^2 \varphi_n = 0$. Следовательно, эти $2n+1$ коэффициента можно задавать произвольно, и функцию φ_n можно выразить через $2n+1$ линейно независимых полиномов.

Если в выражении

$$r^n \sin^s \theta \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2 - 1)^n (\cos s\lambda, \sin s\lambda) \tag{6}$$

мы положим $s = 0, 1, \ldots, n$, то получим $2n+1$ независимых решения, так как ни один $\cos s\lambda$ или $\sin s\lambda$ не может быть выражен как функция от множителей λ при других значениях s. Эти решения можно выразить в виде полиномов от x, y, z, ибо $r^s \sin^s \theta (\cos s\lambda, \sin s\lambda)$ равны действительной и мнимой частям от $(x+iy)^s$ и поэтому являются полиномами. Но $\frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2 - 1)^n$ — также полином по μ степени $n-s$ вида $\sum A_m \mu^{n-s-2m}$, и кроме того справедливы равенства

$$r^{n-s} \mu^{n-s-2m} = (r\mu)^{n-s-2m} r^{2m} = z^{n-s-2m} (x^2 + y^2 + z^2)^m.$$

Следовательно, решения (6) являются $2n+1$ линейно независимыми полиномами. Любой полином степени n от x, y, z, удовлетворяющий уравнению $\nabla^2\varphi = 0$, может быть выражен в виде линейной комбинации этих решений.

24.04. Объемные и поверхностные гармоники: явный вид для $p_n^s(\mu)\, e^{is\lambda}$. Уравнение Лапласа можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\sin\theta\,\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\sin^2\theta\,\partial\lambda^2}=0.$$

Если подставить $\varphi = r^n S_n(\theta, \lambda)$, то первый член уравнения даст $n(n+1)\varphi$ и коэффициент при φ не изменится, если заменить n на $-n-1$. Следовательно, если $r^n S_n(\theta, \lambda)$ — решение уравнения, то и $r^{-n-1}S_n(\theta, \lambda)$ будет решением, и наоборот. Такие решения называются *объемными гармониками* степени n или $-n-1$, а S_n называются *поверхностными гармониками*.

Эти понятия позволяют несколько иначе представить стандартные решения. Действительно, $1/r$ есть решение уравнения Лапласа степени -1, любая производная $\dfrac{\partial^{l+m+n}}{\partial x^l\,\partial y^m\,\partial z^n}\dfrac{1}{r}$ является другим решением степени $-l-m-n-1$. Если умножить эту производную на $r^{2l+2m+2n+1}$, то мы получим решение степени $l+m+n$. Следовательно, функции

$$r^{2l+2m+2n+1}\frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x^l\,\partial y^m\,\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1}$$

образуют набор объемных гармоник степени $l+m+n$. Гармоники одной и той же степени связаны между собой, например

$$r^5\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}+r^5\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r}+r^5\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}=r^5\nabla^2\frac{1}{r}=0. \tag{2}$$

Однако легко получить из этой последовательности независимый набор функций. Обозначим

$$K_{-n-1}^s=\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s}\frac{1}{r}. \tag{3}$$

Эта объемная гармоника является линейной комбинацией производных от $1/r$. Пусть $z^2 > x^2+y^2$. Тогда

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m-\frac{1}{2}\right)}{m!}\frac{(x^2+y^2)^m}{z^{2m+1}}. \tag{4}$$

Но

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)F(\bar{\omega}^2)=2(x+iy)\frac{dF}{d\bar{\omega}^2},\quad \bar{\omega}^2=x^2+y^2, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x+iy)=g'(x+iy)-g'(x+iy)=0, \tag{6}$$

т. е. последовательное применение оператора $\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ дает степени $x+iy$, а последующее дифференцирование ничего не добавляет. Отсюда

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\frac{1}{r}=(-1)^n\frac{n!}{z^{n+1}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2^m m!}\frac{(2m+n)!}{(2m)!}\frac{(x^2+y^2)^m}{z^{m+1}}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s}\frac{1}{r}=\sum(-1)^{n-s+m}\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2^m m!}\frac{2^s m}{(m-s)!}\times$$

$$\times\frac{(2m+n-s)!}{(2m)!}\frac{(x+iy)^s(x^2+y^2)^{m-s}}{z^{2m+n-s+1}}\qquad(s>0). \tag{8}$$

Каждый член содержит множитель $(x+iy)^s$, т. е. $e^{is\lambda}$. Для первого не обращающегося в нуль члена $m=s$, и он имеет вид

$$(-1)^n\frac{(n+s)!}{2^s s!}\frac{(x+iy)^s}{z^{n+s+1}}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$K^s_{-n-1}=(-1)^n\frac{(n+s)!}{2^s s!}\frac{\sin^s\theta e^{is\lambda}}{r^{n+1}}[1+O(\sin^2\theta)]. \tag{10}$$

Но это есть объемная гармоника степени $-n-1$, пропорциональная $e^{is\lambda}$, порядка $\sin^s\theta$ для малых θ; поэтому $r^{n+1}K^s_{-n-1}$ должно отличаться только постоянным множителем от $\sin^s\theta e^{is\lambda}\frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n$.

Дифференцируя по формуле Лейбница и удерживая те члены, которые не обращаются в нуль при $\mu=1$, получаем

$$\frac{d^{n+1}}{d\mu^{n+s}}[(\mu-1)^n(\mu+1)^n]=\frac{(n+s)!}{n!\,s!}n!\,\frac{n!}{(n-s)!}(\mu+1)^{n-s}+\ldots=$$

$$=\frac{2^{n-s}n!\,(n+s)!}{(n-s)!\,s!}+O(\sin^2\theta) \tag{11}$$

и

$$r^{n+1}K^s_{-n-1}=\frac{(-1)^n(n-s)!}{2^n n!}\sin^s\theta e^{is\lambda}\frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n. \tag{12}$$

Это соотношение указывает наиболее удобный выбор нормирующего множителя в стандартных решениях. Мы положим

$$p_n^s(\mu) = \frac{(n-s)!}{2^n (n!)^2} \sin^s\theta \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2-1)^n. \qquad (13)$$

Обычно постоянный множитель выбирают равным $1/2^n n!$ и получающиеся при этом функции обозначают символом $P_n^s(\mu)$. Выбор решения в виде (13) приводит к более симметричной записи различных соотношений. Рассмотрим, как преобразуются наши функции при замене s на $-s$. Используя соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{r}, \qquad (14)$$

получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-s} \frac{\partial^{n+s}}{\partial z^{n+s}}\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= (-1)^s \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s \frac{\partial^{n-s}}{\partial z^{n-s}}\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^s K_{-n-1}^{*s}, \qquad (15)$$

где звездочка означает замену $i\lambda$ на $-i\lambda$. Посмотрим теперь, получится ли то же соотношение при замене s на $-s$ в формуле (13). Согласно этой формуле,

$$2^n (n!)^2 p_n^{-s}(\mu) = (n+s)!\,(1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}s} \frac{d^{n-s}}{d\mu^{n-s}} [(\mu-1)(\mu+1)]^n =$$

$$= (n+s)!\,(1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}s} \sum_{m=0}^{n-s} \frac{(n-s)!}{m!\,(n-s-m)!} \frac{n!\,(\mu-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{n!\,(\mu+1)^{s+m}}{(s+m)!},$$

где члены с $m > n-s$ обращаются в нуль. Поэтому все члены содержат множитель $(\mu^2-1)^s$, и их сумма равна

$$(-1)^s (n+s)!\,(1-\mu^2)^{1/2 s} \sum_{m=0}^{n-s} \frac{(n-s)!\,n!\,n!\,(\mu-1)^{n-m-s}(\mu+1)^m}{m!\,(n-s-m)!\,(n-m)!\,(s+m)!}. \qquad (16)$$

Но

$$2^n (n!)^2 p_n^s(\mu) = (n-s)!\,(1-\mu^2)^{1/2 s} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n+s} \frac{(n+s)!}{m!\,(n+s-m)!} \frac{n!\,(\mu-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{n!\,(\mu+1)^{-s+m}}{(-s+m)!}. \qquad (17)$$

Здесь члены с $m<s$ обращаются в нуль. Полагая $m=s+u$, получаем выражение

$$(n-s)!\,(1-\mu^2)^{1/2 s}\sum_{u=0}^{n}\frac{(n+s)!}{(s+u)!\,(n-u)!}\,\frac{n!\,(\mu-1)^{n-s-u}}{(n-s-u)!}\,\frac{n!\,(\mu+1)^{u}}{u!}, \quad (18)$$

совпадающее с суммой, определенной формулой (16). Члены с $u>n-s$ обращаются в нуль. Отсюда

$$p_n^{-s}(\mu)=(-1)^s\,p_n^s(\mu). \quad (19)$$

В нашем исходном определении не фигурировали отрицательные значения параметра s. Однако естественно считать, что функции $p_n^s \exp i(\gamma t-s\lambda)$ и $p_n^{-s}\exp i(\gamma t+s\lambda)$ представляют две волны одинаковой амплитуды, распространяющиеся на сфере в противоположных направлениях. Нормируя функции согласно (13), мы удовлетворяем этому условию. При других условиях нормировки вообще не имело бы смысла рассматривать отрицательные значения параметра s. При обычном определении, отличающемся от нашего множителем $(n-s)!/n!$, амплитуды волн, выраженных через обычные решения, отличались бы друг от друга весьма существенно. Для $n=s=4$ их отношение было бы равно $8!=40\,320$. Множитель $(-1)^s$ несколько нарушает симметричную запись и мог бы быть исключен, если ввести в определение функций множитель i^s. Однако при этом функции с нечетными значениями s были бы мнимыми, и это нецелесообразно. Множитель $(n-s)!$ был введен в определение функций из соображения симметрии уже Дарвином [1], однако нам кажется, что лучше ввести множитель $(n-s)!/n!$, поскольку при этом мы сохраняем стандартную форму решений для $s=0$.

Гобсон приписывает множитель $(-1)^s$ функции $P_n^s(\mu)$, а не функции $P_n^{-s}(\mu)$. В этом он следует Кондону и Шортли [2], которые пользуются нормированными функциями.

Общепринятый современный способ *нормировки* функций состоит в подборе такого постоянного множителя, что интеграл от квадрата функции в рассматриваемой области становится равным единице. При этом упрощается запись некоторых общих соотношений, например в теории интегральных уравнений. Однако в простейших приложениях это означало бы, что вместо функций $\cos x$ и $\sin x$ мы должны были бы пользоваться функциями $(2/\pi)^{1/2}\cos x$ и $(2/\pi)^{1/2}\sin x$ для интервала длины π и функциями $\pi^{-1/2}\cos x$, $\pi^{-1/2}\sin x$ для интервала длины 2π. Потребовались бы существенно различные таблицы для этих двух случаев. Для более сложных функций введение нормировочного множителя приводит к появлению квадратных корней во многих

соотношениях и, в частности, к излишнему усложнению рекуррентных формул. Если функции заданы на бесконечном интервале, нормирующий интеграл может расходиться (например, $\int_0^\infty xI_n^2(x)dx$). В этом случае необходим другой способ нормировки. Поэтому мы примем в качестве стандартных функций первого рода (которые при значениях θ вблизи 0 и π ведут себя как $\sin^s\theta$) выражение

$$p_n^s(\mu) = \frac{(n-s)!}{n!} P_n^s(\mu) = \frac{(n-s)!}{2^n (n!)^2} \sin^s\theta \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (\mu^2-1)^n. \qquad (20)$$

Соответствующие решения уравнения Лапласа будут

$$(r^n, r^{-n-1}) p_n^s(\mu) (\cos s\lambda, \sin s\lambda). \qquad (21)$$

Эти решения связаны с объемными гармониками степени $-n-1$ соотношением

$$K_{-n-1}^s = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^n n!\, r^{-n-1} p_n^s(\mu)\, e^{is\lambda}. \qquad (22)$$

Функции $p_n^0(\mu)$ обычно называются *функциями или полиномами Лежандра*, или *зональными гармониками*; при $s=0$ индекс s обычно не пишут. Функции p_n^s называются *присоединенными функциями Лежандра*, а функции $p_n^s(\cos s\lambda, \sin s\lambda)$ — *тессеральными гармониками*, по-видимому, по названию одного из видов игры в кости, известного в древнем Риме. При $s=n$ тессеральные гармоники называются секториальными гармониками.

Важно иметь общее представление о характере поведения рассматриваемых здесь функций. Будем исходить из общего положения о том, что нули производной от непрерывной функции разделяют нули исходной функции. Поскольку функция $(\mu^2-1)^n$ имеет n-кратные нули в точках ± 1, ее первая производная будет иметь $(n-1)$-кратные нули в этих точках и один нуль, лежащий между ними, вторая производная будет иметь два нуля между точками -1 и $+1$, а функция p_n будет иметь n действительных нулей, лежащих между точками -1 и $+1$. Степени $\sin\theta$ обращаются в нуль в рассматриваемом интервале только при $\mu = \pm 1$, поэтому при $s>0$ функция p_n^s, кроме нулей при $\theta = 0$ и π, будет иметь еще $n-s$ действительных нулей.

Таким образом, зональные гармоники сохраняют знак в каждом из $n+1$ поясов, заключенных между двумя параллелями; области, содержащие полюса, также считаются поясами. При увеличении s на 1 уменьшается на 1 число параллелей,

но зато увеличивается на 2 число меридианов, где соответствующая гармоника обращается в нуль. Из вида функции

$$p_n(\mu) = \left\{ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} [(\mu - 1)^n (\mu + 1)^n] \right\},$$

применяя формулу Лейбница, легко установить, что все члены, кроме одного, обратятся в нуль при $\mu = \pm 1$, и мы получим

$$p_n(1) = 1, \quad p_n(-1) = (-1)^n. \tag{23}$$

В действительности функция $|p_n(\mu)|$ по абсолютной величине не превосходит 1. Если значение μ близко к 1, мы получим основной член в p_n^s, полагая в формуле (18) $u = n - s$, в виде

$$p_n^s = \frac{(n+s)!}{2^s n!\, s!} \sin^s \theta [1 + O(\sin^2 \theta)]. \tag{24}$$

24.05. Разложение $(r^2 - 2rh\cos\theta + h^2)^{-1/2}$; функция Грина для сферы. Особое значение имеют гармоники при $s = 0$, поскольку во многих случаях возмущения обладают аксиальной симметрией. Воспользуемся соотношением

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^n n!\, r^{-n-1} p_n(\mu) \tag{1}$$

и рассмотрим функцию

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}} = \frac{1}{(r^2 - 2rh\cos\theta + h^2)^{1/2}}. \tag{2}$$

Эта функция разлагается в ряд по отрицательным степеням r, сходящийся при $h < r$. Поскольку z и h входят в выражение для R только в комбинации $z - h$, справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^n \frac{1}{R} = \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{1}{R}, \tag{3}$$

откуда с помощью формулы Тейлора получаем

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{h^n}{n!} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{1}{R}\right]_{h=0} = \sum \frac{h^n}{r^{n+1}} p_n(\mu). \tag{4}$$

Разложение (4) часто используют для определения полиномов $P_n(\mu)$ $[= p_n(\mu)]$. Из него легко найти явный вид полиномов $P_n(\mu)$ при помощи формулы Лагранжа [3]. Однако на практике редко удается без больших трудностей получить из этого разложения явный вид общего члена, и мы предпочитаем его рассматривать как теорему существования. Ввиду большого практического значения присоединенных функций представляется целесообразным иметь их определение с самого начала.

При $0<\alpha<1$

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-1/2}=(1-\alpha e^{i\theta})^{-1/2}(1-\alpha e^{-i\theta})^{-1/2}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{i\theta}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\alpha^2e^{2i\theta}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{-i\theta}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\alpha^2e^{-2i\theta}+\ldots\right). \qquad (5)$$

Коэффициент при α^n в разложении (5) представляет собой сумму косинусов с положительными коэффициентами. Поэтому он достигает максимального значения, когда все косинусы равны ±1. Отсюда вытекает, что

$$|p_n(\cos\theta)|\leqslant p_n(1)=1. \qquad (6)$$

Часто встречаются ряды вида

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{h^n}{r^{n+1}}p_n(\mu). \qquad (7)$$

Дифференцируя ряд (4) и умножая результат на h, находим

$$h\frac{\partial}{\partial h}\frac{1}{R}=\sum n\frac{h^n}{r^{n+1}}p_n(\mu)\qquad(h<r).$$

Отсюда мы получаем сумму ряда (7) в виде

$$S=\left(2h\frac{\partial}{\partial h}+1\right)\frac{1}{(r^2-2rh\cos\theta+h^2)^{1/2}}=\frac{r^2-h^2}{(r^2-2rh\cos\theta+h^2)^{3/2}}. \qquad (8)$$

Эта функция возникает при определении потенциала по его граничным значениям, заданным на сфере. При $h>r$ справедлива та же формула, если только поменять местами r и h.

24.06. Потенциал вне области тяготеющих масс. Теореме о разложимости потенциальной функции внутри сферической полости соответствует аналогичная теорема о разложимости потенциала вне тяготеющей сферы, создающей этот потенциал. Пусть $P(x_i)$ — точка вне сферы с центром в начале координат, $Q(\xi_i)$ — точка, в которой находится элемент массы dm. Потенциал выражается в виде $\gamma\int dm/R$, где

$$R^2=(x_i-\xi_i)^2,\quad \rho^2=\xi_i^2, \qquad (1)$$
$$\frac{1}{R}=\sum\frac{\rho^n}{r^{n+1}}p_n(\cos\vartheta). \qquad (2)$$

Ряд (2) равномерно сходится вне сферы и на ее поверхности, и поэтому его можно умножить на dm и почленно интегрировать. Мы получаем разложение потенциала по отрицательным степеням r; это разложение можно почленно дифференцировать любое число раз при $r > \rho$. Отсюда следует, что величина $\nabla^2\varphi$ представляется в виде сходящегося ряда, тождественно равного нулю, и поэтому каждый член разложения φ в ряд должен удовлетворять условию $\nabla^2\varphi = 0$. Но если функция $r^{-n-1}f(\theta, \lambda)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то то же самое справедливо для функции $r^n f(\theta, \lambda)$, и поэтому $f(\theta, \lambda)$ является линейной комбинацией найденных нами решений.

Таким образом, потенциал φ выражается в виде ряда

$$\varphi = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} p_n^s(\mu)\left(a_{ns}\cos s\lambda + b_{ns}\sin s\lambda\right). \qquad (3)$$

Условие $r > \rho$ является достаточным, но не необходимым условием существования этого разложения. Рассмотрим некоторое распределение масс внутри поверхности S, на которой ρ достигает максимального значения, равного c. Рассмотрим некоторую другую поверхность S' вне поверхности S. Согласно теореме об эквивалентных слоях, поле вне поверхности S' будет таким же, как и исходное, если задать соответствующее распределение источников и диполей на поверхности S', которая может и не быть сферой. Пусть a и b — максимальное и минимальное значения ρ на поверхности S'. Если бы условие $r > \rho$ было необходимым для существования разложения вида (3), то разложение потенциала, соответствующего распределению на поверхности S', существовало бы только при $r > a$. Однако этот потенциал совпадает с потенциалом, порожденным распределением масс внутри поверхности S, и, следовательно, его разложение существует при $r > c$. Если при этом $b > c$, то разложение будет существовать и внутри поверхности S', даже если S' не является сферой. Таким образом, возможно, что потенциал вне некоторой не обязательно сферической поверхности, на которой распределена тяготеющая масса, допускает разложение по отрицательным степеням r, сходящееся и там, где значения r меньше наибольшего значения ρ.

Этот факт теории потенциала аналогичен аналитическому продолжению в теории функций комплексного переменного. Разложение будет справедливо, если потенциал вне поверхности S' совпадет с потенциалом, порожденным распределением масс внутри некоторой поверхности, на которой наибольшее значение ρ меньше, чем наименьшее значение ρ на поверхности S'. Это особенно важно для задач, в которых поверх-

ности не являются в точности сферами, и в частности для теории фигуры Земли. Внешний потенциал часто может быть продолжен внутрь создающего его тела, однако в результате такого продолжения мы не получим истинное значение потенциала внутри тела, поскольку продолженный потенциал, если он существует, удовлетворяет уравнению Лапласа, тогда как потенциал внутри тела этому уравнению не удовлетворяет.

Существует также аналог сингулярностей. Так, на заряженной сфере с точечным выступом, вообще говоря, будет локальная концентрация заряда на этом выступе, и потенциал, вызванный таким распределением заряда, не может быть представлен в виде потенциала, соответствующего некоторому распределению заряда внутри поверхности.

24.07. Соотношения ортогональности; теорема о разложении. Если предположить, что разложение существует, то его можно определить, рассматривая значения функции на сфере. *Все наши стандартные решения взаимно ортогональны в том смысле, что произведение любых двух из них, умноженное на элемент поверхности dS и проинтегрированное по сфере, равно нулю.* Пусть S_m и S_n — две поверхностные гармоники различных степеней. Тогда функции $\varphi_m = r^m S_m$ и $\varphi_n = r^n S_n$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Если мы применим теорему Грина к сфере радиуса a, то получим

$$\int\int \left(\varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial r}\right) dS = 0. \qquad (1)$$

Но это то же самое, что

$$(m-n)\, a^{m+n-1} \int\int S_m S_n \, dS. \qquad (2)$$

Первый множитель не обращается в нуль, если $m \neq n$. Следовательно, если $m \neq n$, то

$$\int\int S_m S_n \, dS = 0. \qquad (3)$$

То же справедливо для гармоник одинаковой степени, любая пара $p_n^s \cos s\lambda$, $p_n^s \sin s\lambda$, $p_n^t \cos t\lambda$, $p_n^t \sin t\lambda$ ортогональна, так как интеграл от произведения их по λ обращается в нуль, за исключением $s = t$, когда мы интегрируем квадрат гармоники, беря в обоих множителях либо косинус, либо синус.

Поскольку мы можем положить $S_m = p_m^s \cos s\lambda$, $S_n = p_n^s \cos s\lambda$, для $m \neq n$ получаем

$$\int\int p_m^s p_n^s \cos^2 s\lambda \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = 0, \qquad (4)$$

и отсюда

$$\int_{-1}^{1} p_m^s p_n^s \, d\mu = 0 \quad (m \neq n). \tag{5}$$

Линейная независимость стандартных гармоник следует отсюда непосредственно, хотя мы ее уже проверяли другим методом. Действительно, обозначим через Y_p некоторую гармонику. Тогда при существовании соотношения

$$\sum a_p Y_p = 0$$

мы могли бы его умножить на произвольное Y_q и проинтегрировать по сфере. В результате получили бы, что сумма равна нулю. Но каждый член этой суммы в отдельности обращается в нуль в силу условия ортогональности, за исключением члена с Y_q, который имеет вид $a_q \int\int Y_q^2 dS$ и не может обратиться в нуль из-за предположения, что $a_q \neq 0$. Следовательно, предположение о линейной зависимости гармоник приводит к противоречию.

Легко показать, что *каждая зональная гармоника p_n ортогональна полиному от μ более низкой степени*. Действительно, пусть $f(\mu)$ — полином от μ степени $m < n$ со старшим членом $a_m \mu^m$. Умножая p_m на a_m и вычитая из $f(\mu)$, получим полином степени $m-1$. Умножая p_{m-1} на соответствующий коэффициент и вычитая, получим полином на 1 меньшей степени и т. д. Этот процесс закончится на $m+1$ шаге. Таким образом, мы получаем сумму кратных зональных гармоник степени $\leqslant m$, тождественно равную $f(\mu)$. Но каждая из этих гармоник имеет степень, отличную от n, и поэтому ортогональна p_n. Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} f(\mu) p_n(\mu) \, d\mu = 0.$$

Теперь предположим, что функция $f(\theta, \lambda)$ может быть разложена в ряд по сферическим гармоникам так, что

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} (a_{ns} p_n^s \cos s\lambda + b_{ns} p_n^s \sin s\lambda), \tag{6}$$

причем функция $f(\theta, \lambda)$ известна и требуется определить коэффициенты a_{ns}, b_{ns} в предположении, что разложение существует. Умножая на соответствующие гармоники и интегрируя по

$\sin\theta\, d\theta\, d\lambda$ и учитывая условия ортогональности, получим

$$a_{n0} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (p_n)^2\, d\mu\, d\lambda = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\theta, \lambda)\, d\mu\, d\lambda, \tag{7}$$

$$a_{ns} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (p_n^s)^2 \cos^2 s\lambda\, d\mu\, d\lambda = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\theta, \lambda)\, p_n^s \cos s\lambda\, d\mu\, d\lambda, \tag{8}$$

$$b_{ns} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (p_n^s)^2 \sin^2 s\lambda\, d\mu\, d\lambda = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\theta, \lambda)\, p_n^s \sin s\lambda\, d\mu\, d\lambda. \tag{9}$$

Отсюда видно, что коэффициенты выражаются через определенные интегралы. Для интегралов, стоящих слева, интегрирование по λ дает 2π или π, а

$$\int_{-1}^{1} (p_n)^2\, d\mu = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n\right]^2 d\mu. \tag{10}$$

Интегрируя по частям n раз и учитывая, что подынтегральное выражение обращается в нуль на обоих пределах, получим

$$\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^n \int_{-1}^{1} (\mu^2-1)^n \frac{d^{2n}}{d\mu^{2n}}(\mu^2-1)^n\, d\mu =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^n \int_{-1}^{1} (\mu^2-1)^n\, d\mu = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, 2 \int_{0}^{1/2\pi} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{2n\cdot(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\ldots 1} = \frac{2}{2n+1}. \tag{11}$$

Соответствующий интеграл от $(p_n^s)^2$ может быть немного упрощен, если использовать функцию p_n^{-s}. Будем иметь

$$\int_{-1}^{1} (p_n^s)^2\, d\mu = (-1)^s \int_{-1}^{1} p_n^s\, p_n^{-s}\, d\mu = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^4} \int_{-1}^{1} (n-s)!\sin^s\theta \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} \times$$

$$\times (\mu^2-1)^n (n+s)! \sin^{-s}\theta \frac{d^{n-s}}{d\mu^{n-s}}(\mu^2-1)^n\, d\mu =$$

$$= \frac{(-1)^s (n-s)!\,(n+s)!}{2^{2n}(n!)^4} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n \frac{d^{n-s}}{d\mu^{n-s}}(\mu^2-1)^n\, d\mu.$$

Интегрируя по частям s раз, получим

$$\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{2^{2n}(n!)^4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n\right]^2 d\mu =$$

$$= \frac{(n-s)!\,(n+s)!}{(n!)^2}\int_{-1}^{1}(p_n)^2\,d\mu = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{(n!)^2}. \quad (12)$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(p_n)^2\sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{4\pi}{2n+1}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(p_n^s)^2(\cos^2 s\lambda,\ \sin^2 s\lambda)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}\,\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{(n!)^2}. \quad (14)$$

Теперь коэффициенты можно определить с помощью равенств (7), (8), (9).

Необходимо заметить, что это разложение обладает свойством, аналогичным свойству разложения Фурье или любого другого разложения по ортогональным функциям. Именно, если $\sum$ — сумма конечного числа членов ряда гармоник с произвольными коэффициентами и мы подбираем коэффициенты так, чтобы $\int\int[f(\theta,\lambda)-\sum]^2\,d\mu\,d\lambda$ был минимальным, то определенные таким образом коэффициенты будут равны a_{ns}, b_{ns}. Имеется также аналог теоремы Парсеваля

$$\int\int[f(\theta,\lambda)]^2\,d\mu\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}a_{ns}^2\int\int(p_n^s)^2\cos^2 s\lambda\,d\mu\,d\lambda +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}b_{ns}^2\int\int(p_n^s)^2\sin^2 s\lambda\,d\mu\,d\lambda,$$

означающий, что среднее значение квадрата f на сфере равно сумме средних значений квадратов составляющих гармоник.

24.071. В предыдущих утверждениях предполагалось, что разложение существует. Ранее мы доказали это только для потенциала на сфере, когда вещество находится либо целиком вне сферы, либо целиком внутри нее. Обобщение на случай функции $f(\theta,\lambda)$ более общего вида можно сделать, как и для рядов Фурье, различными путями. Для случая, когда функция $f(\theta,\lambda)$ имеет непрерывные вторые производные, доказательство дано Курантом и Гильбертом [4]. Если же функция $f(\theta,\lambda)$ не удовлетворяет

этому условию, но может быть равномерно приближена всюду на сфере (за исключением, может быть, множества точек, заключенных в сколь угодно малой области) функциями, удовлетворяющими этому условию, то ряд вида (6) существует и совпадает с $f(\theta, \lambda)$ с любой заданной точностью везде, кроме исключенной области. Аппроксимирующие функции можно выбрать различным путем; один из них — это обобщение утверждения **14.08.** Наиболее простой способ заключается в том, что, если $f(\theta, \lambda)$ — потенциал на сфере радиуса a и интеграл $\int\int f(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda$ на сфере существует, можно взять последовательность таких внутренних концентрических сфер радиуса $a - \delta_n$, где $\delta_n \to 0$, что потенциалы на этих сферах имеют производные любого порядка. Далее, так же как в **14.05**, можно доказать, что когда $\delta_n \to 0$, потенциалы на этих сферах равномерно стремятся к $f(\theta, \lambda)$ в любой замкнутой области (θ, λ), в которой $f(\theta, \lambda)$ непрерывна. Следовательно, для того чтобы $f(\theta, \lambda)$ могла быть аппроксимирована почти всюду рядом поверхностных гармоник, достаточно, чтобы она была интегрируема на сфере.

Так же как для рядов Фурье, такой вид приближения возможен и в некоторых случаях, когда не существует разложения вида **24.07** (6). Если функция $f(\theta, \lambda)$ имеет разрывы, то условия сходимости ряда **24.07** (6) с коэффициентами по (7), (8), (9) сформулировать гораздо труднее, чем для рядов Фурье.

24.08. На стр. 259 приведены выражения для функций p_n^s до $n = 4$. Кроме того, в этой же таблице приведены выражения для полиномов, полученных умножением на $r^n (\cos s\lambda, \sin s\lambda)$, и среднеквадратические значения после умножения на $\cos s\lambda$ или $\sin s\lambda$ и усреднения по λ на сфере.

В среднеквадратических значениях при $s \neq 0$ принят во внимание множитель $^1/_2$, получающийся при осреднении $\cos^2 s\lambda$ или $\sin^2 s\lambda$.

24.09. Аналог теоремы Лорана. Теоремы **24.03** и **24.06**, относящиеся к разложению в ряд потенциала внутри сферической полости или вне сферы, немедленно обобщаются на случай, когда φ удовлетворяет уравнению Лапласа в области, ограниченной двумя сферами, находящимися одна внутри другой. Действительно, можно применить теорему об эквивалентных слоях к рассматриваемой области; тогда потенциал будет суммой потенциалов внутренней и внешней сфер и может быть представлен в виде ряда по объемным гармоникам, но этот ряд будет содержать как положительные, так и отрицательные сте-

n	s	p_n^s	Средний квадрат	Полиномы
0	0	1	1	1
1	0	$\cos\theta$	$\frac{1}{3}$	z
	1	$\sin\theta$	$\frac{1}{3}$	$x,\ y$
2	0	$\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}(2z^2-x^2-y^2)$
	1	$\frac{3}{2}\cos\theta\sin\theta$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}zx,\ \frac{3}{2}zy$
	2	$\frac{3}{2}\sin^2\theta$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}(x^2-y^2),\ 3xy$
3	0	$\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}z(2z^2-3x^2-3y^2)$
	1	$\frac{1}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta-1)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{2}x(4z^2-x^2-y^2),\ \frac{1}{2}y(4z^2-x^2-y^2)$
	2	$\frac{5}{2}\sin^2\theta\cos\theta$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{2}z(x^2-y^2),\ 5xyz$
	3	$\frac{5}{2}\sin^3\theta$	$\frac{10}{7}$	$\frac{5}{2}(x^3-3xy^2),\ \frac{5}{2}(3x^2y-y^3)$
4	0	$\frac{1}{8}(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}[8z^4-24z^2(x^2+y^2)+3(x^2+y^2)^2]$
	1	$\frac{5}{8}\sin\theta(7\cos^3\theta-3\cos\theta)$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{8}x[4z^3-3z(x^2+y^2)],\ \frac{5}{8}y[4z^3-3z(x^2+y^2)]$
	2	$\frac{5}{8}\sin^2\theta(7\cos^2\theta-1)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{8}(x^2-y^2)(6z^2-x^2-y^2),\ \frac{5}{4}xy(6z^2-x^2-y^2)$
	3	$\frac{35}{8}\sin^3\theta\cos\theta$	$\frac{35}{72}$	$\frac{35}{8}z(x^3-3xy^2),\ \frac{35}{8}z(3x^2y-y^3)$
	4	$\frac{35}{8}\sin^4\theta$	$\frac{35}{9}$	$\frac{35}{8}(x^4-6x^2y^2+y^4),\ \frac{35}{2}xy(x^2-y^2)$

пени r. Это и есть сферический аналог теоремы Лорана. Он широко применяется в теории земного магнетизма. Часть переменной составляющей магнитного поля на поверхности Земли возникает за счет электрических (из-за ионизации) токов в верхней атмосфере, часть — за счет токов в Земле. Первая дает потенциал на поверхности, который представляется в виде ряда объемных гармоник положительных степеней, а последняя — в виде ряда по отрицательным степеням. Изменение потенциала на поверхности можно определить, интегрируя горизонтальную составляющую магнитного поля, а вертикальную составляющую можно измерить непосредственно. Если потенциал равен

$$\varphi = \sum (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) S_n,$$

то вертикальная составляющая поля равна

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum [-nA_n r^{n-1} + (n+1) B_n r^{-n-2}] S_n.$$

Члены каждой гармоники при r, равном радиусу Земли, находятся из наблюдений; полученные значения коэффициентов дают пару уравнений для определения A_n и B_n, по которым можно судить, насколько общее поле определяется внешними, а насколько внутренними токами.

24.10. Рекуррентные формулы. Из равенства

$$(1 - 2\mu\alpha + \alpha^2)^{-1/2} = \sum p_n(\mu)\alpha^n, \tag{1}$$

дифференцируя по α, находим

$$\frac{\mu - \alpha}{(1 - 2\mu\alpha + \alpha^2)^{3/2}} = \sum n p_n \alpha^{n-1}. \tag{2}$$

Умножим (1) на $(\mu - \alpha)$, а (2) на $1 - 2\mu\alpha + \alpha^2$ и сравним коэффициенты при α^n. Тогда получим

$$(n+1) p_{n+1} - (2n+1)\mu p_n + n p_{n-1} = 0, \tag{3}$$

рекуррентное соотношение, связывающее три последовательные зональные гармоники.

Дифференцируя (1) по μ, получим

$$\frac{\alpha}{(1 - 2\mu\alpha + \alpha^2)^{3/2}} = \sum \frac{dp_n}{d\mu}\alpha^n, \tag{4}$$

а сравнение с (2) приводит к уравнению

$$\mu \frac{dp_n}{d\mu} - \frac{dp_{n-1}}{d\mu} = n p_n. \tag{5}$$

Если теперь мы продифференцируем (3) и исключим $\mu\, dp_n/d\mu$, то получим

$$(2n+1)\,p_n = \frac{dp_{n+1}}{d\mu} - \frac{dp_{n-1}}{d\mu} \tag{6}$$

и отсюда

$$(2n+1)\int_1^{\mu} p_n\, d\mu = p_{n+1} - p_{n-1}. \tag{7}$$

Дифференцируя s раз это выражение, можно получить рекуррентное соотношение между s-ми производными, а значит, и между p_n^s [5]:

$$(2n+1)\,\frac{d^{s-1}p_n}{d\mu^{s-1}} = \frac{d^s p_{n+1}}{d\mu^s} - \frac{d^s p_{n-1}}{d\mu^s}, \tag{8}$$

$$(n-s+1)\,\frac{d^s p_{n+1}}{d\mu^s} = (2n+1)\,\mu\,\frac{d^s p_n}{d\mu^s} - (n+s)\,\frac{d^s p_{n-1}}{d\mu^s}. \tag{9}$$

Прямые соотношения между p_n^s, возможно, менее удобны, потому что в них множитель $\sin^s\theta$ стоит под знаком дифференцирования. Следующие формулы легко следуют из **24.04** (3) и имеют ту особенность, что s не появляется в коэффициентах:

$$p_{n+1}^s = \mu p_n^s - \frac{1-\mu^2}{n+1}\,\frac{dp_n^s}{d\mu}. \tag{10}$$

Другие рекуррентные соотношения, доказательство которых не представляет трудностей, имеют вид

$$(1-\mu^2)\,\frac{dp_n}{d\mu} = \int_{\mu}^{1} n(n+1)\,p_n\, d\mu = \frac{n(n+1)}{2n+1}\,(p_{n-1} - p_{n+1}) =$$

$$= (n+1)\,(\mu p_n - p_{n+1}) = n\,(p_{n-1} - \mu p_n).$$

Если $f(\mu) = 0$ для $\mu < \alpha$ и равно 1 для $\mu > \alpha$, где $|\alpha| < 1$, то

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)\,p_n(\mu)\,d\mu = \frac{1}{2n+1}\,[p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)] \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)\,d\mu = 1-\alpha,$$

а разложение $f(\mu)$ в ряд по полиномам Лежандра есть

$$\frac{1}{2}\,(1-\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\,[p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)]\,p_n(\mu).$$

Теперь мы можем привести несколько примеров применения сферических гармоник *).

24.11. Потенциал однородного круглого диска. Мы уже видели (**6.032**), что потенциал на оси диска равен

$$\varphi = 2\pi\gamma\sigma\left[\sqrt{b^2+x^2} - |x|\right], \tag{1}$$

где b — радиус диска, а x — расстояние от плоскости диска. Заменим x на r и разложим φ по убывающим степеням r в предположении, что $r > b$:

$$\varphi = 2\pi\gamma\sigma r\left[\frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)b^4}{2!\,r^4} + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-m\right)}{m!}\frac{b^{2m}}{r^{2m}} + \ldots\right] =$$

$$= \pi\gamma\sigma b^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2!}\frac{b^2}{r^3} + \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-m\right)}{m!}\frac{b^{2m-2}}{r^{2m-1}}\right]. \tag{2}$$

Пусть теперь r — расстояние от центра диска; введем полярные координаты, в которых θ отсчитывается от оси диска. Выражение (2) справедливо лишь для $\theta = 0$. Но мы знаем, что для $r > b$ потенциал может быть разложен в ряд вида $\sum A_m r^{-m-1} S_m$, а из-за симметрии он должен зависеть только от r, θ. Отсюда следует, что для каждого значения r выражение S_m может содержать только p_m. Далее, $p_m = 1$ для $\theta = 0$, поэтому единственным видом функции φ, который бы 1) удовлетворял уравнению Лапласа, 2) был бы симметричен относительно оси, 3) равнялся бы (2) на оси, является

$$\varphi = \pi\gamma\sigma b^2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\frac{b^2}{r^3}p_2 + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-m\right)}{m!}\frac{b^{2m-2}}{r^{2m-1}}p_{2m-2} + \ldots\right]. \tag{3}$$

Если $r < b$, то существует разложение в ряд по *возрастающим* степеням r.

24.111. Потенциал от поверхностной плотности на сфере. На основании теоремы о разложении мы можем выразить σ в виде ряда по сферическим гармоникам

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} a_{ns}p_n^s \cos s\lambda + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{n} b_{ns}p_n^s \sin s\lambda, \tag{1}$$

*) Интеграл от произведения трех сферических гармоник дан в [5, 6].

который мы будем записывать коротко как $\sum c_{ns}S_{ns}$. Потенциал внутри и вне сферы выражается в виде рядов

$$\varphi_1 = \sum A_{ns}\left(\frac{r}{a}\right)^n S_{ns}, \quad \varphi_0 = \sum B_{ns}\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} S_{ns}. \tag{2}$$

Потенциал непрерывен при пересечении поверхности сферы. Следовательно, при $r = a$ оба потенциала φ_0 и φ_1 должны переходить в потенциал на сфере, а на основании теоремы о разложении должно быть $A_{ns} = B_{ns}$. Скачок производной $\partial\varphi/\partial n$ на сфере равен $-4\pi\gamma\sigma$, т. е.

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right)_{r\to a} - \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r\to a} = -4\pi\gamma\sigma.$$

Применяя теорему о разложении, мы можем приравнять коэффициенты при всех гармониках и тогда

$$-(2n+1)\frac{A_{ns}}{a} = -4\pi\gamma c_{ns},$$

$$A_{ns} = B_{ns} = \frac{4\pi\gamma a c_{ns}}{2n+1}.$$

Таким образом, полностью определяются φ_0 и φ_1. Рассмотрение всех гармоник с одним и тем же n в точности такое же, поэтому S_{ns} обычно заменяется просто на S_n. Но если нам заданы значения σ на сфере, то в некоторых случаях, прежде чем получить ответ, мы должны произвести разложение как по s, так и по n.

24.112. Потенциал от заданного распределения масс внутри сферы. Пусть

$$\rho = \sum \rho_{ns}S_{ns},$$

где ρ_{ns} — функция от r', расстояния от центра. Потенциалы φ_1 и φ_0 возьмем в виде

$$\varphi_1 = \sum A_{ns}\left(\frac{r}{a}\right)^n S_{ns}, \quad \varphi_0 = \sum B_{ns}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_{ns},$$

где A_{ns} — функция от r, а B_{ns} постоянно, так как φ_0 должно удовлетворять уравнению Лапласа. Можно применить два метода. С одной стороны, использовать условия, что φ_1 должно удовлетворять уравнению Пуассона, а φ и $\partial\varphi/\partial r$ должны быть непрерывны при $r = a$. С другой стороны, слой между r' и $r' + dr'$ можно рассматривать как поверхностное распределение плотности $\rho\, dr'$. Потенциал такого слоя для $r < r'$ равен

$$\sum \frac{4\pi\gamma}{2n+1}\rho_{ns}S_{ns}r'\,dr'\left(\frac{r}{r'}\right)^n,$$

а для $r > r'$ равен

$$\sum \frac{4\pi\gamma}{2n+1} \rho_{ns} S_{ns} r' dr' \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1}.$$

Складывая потенциалы всех слоев, получим

$$\varphi_0 = 4\pi\gamma \int_0^a \sum \frac{\rho_{ns} S_{ns}}{2n+1} \frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}} dr',$$

$$\varphi_1 = 4\pi\gamma \int_r^a \sum \frac{\rho_{ns} S_{ns}}{2n+1} \frac{r'^{n+2}}{r^{n+1}} dr' + 4\pi\gamma \int_0^r \sum \frac{\rho_{ns} S_{ns}}{2n+1} \frac{r^n}{r'^{n-1}} dr'.$$

24.113. Потенциал почти сферического проводника. Пусть уравнение проводника дано в виде

$$r = a\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \varepsilon_{ns} S_{ns}\right), \tag{1}$$

где ε_{ns} — постоянные малые величины, квадратами которых можно пренебречь. Предположим также, что

$$\varphi_0 = A_{00} \frac{a}{r} + \sum A_{ns} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_{ns}. \tag{2}$$

Величина φ_1 будет, конечно, постоянной, так как по предположению на поверхности потенциал имеет одинаковое значение и равен v. При $\varepsilon_{ns} = 0$ потенциал φ_0 равен своему первому члену, поэтому можно предположить, что все коэффициенты A_{ns} $(n > 0)$ того же порядка малости, что и ε_{ns}. При прямой подстановке выражения (1) в (2) возникают трудности, связанные с тем, что (2) не обязательно справедливо, если r меньше *некоторого* значения r на проводнике. Но можно взять сферу радиуса $r = a + h$, где $h > 0$ и достаточно велико, так что проводник целиком помещается внутри сферы; тогда вне сферы разложение (2) справедливо. Вне проводника φ и все его производные непрерывны. Следовательно, на поверхности проводника

$$\varphi = (\varphi_0)_{r=a+h} - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\right)_{r=a+h} (a + h - r) + o(h), \tag{3}$$

$$\varphi = \sum A_{ns} \left(\frac{a}{a+h}\right)^{n+1} S_{ns} + \sum (n+1) A_{ns} \frac{a^{n+1}}{(a+h)^{n+2}} (a + h - r) S_{ns} + o(h) =$$

$$= \sum A_{ns} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_{ns} + o(h), \tag{4}$$

и мы *можем* применить разложение (2) с небольшой ошибкой на проводнике. Тогда

$$v = \sum A_{ns}\left[1 - \sum (m+1)\,\varepsilon_{ml} S_{ml}\right] S_{ns} =$$
$$= A_{00}\left[1 - \sum (n+1)\,\varepsilon_{ns} S_{ns}\right] + \sum A_{ns} S_{ns} + o\left(\sum \varepsilon^2\right) \qquad (5)$$

для всех θ, λ. Отсюда

$$A_{ns} = (n+1)\,\varepsilon_{ns} A_{00}, \quad A_{00} = v,$$
$$\varphi_0 = v\left[\frac{a}{r} + \sum (n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \varepsilon_{ns} S_{ns}\right] \qquad (6)$$

с точностью до членов первого порядка отклонения от сферы.

24.114. Фигура Земли. В задачах, рассмотренных выше, для определения φ во внешних точках было достаточно задать форму поверхности и значения φ *или* $\partial\varphi/\partial r$ на ней. Сейчас мы перейдем к задаче, когда требуется определить форму поверхности, а достаточно подробно известны значения φ *и* $\partial\varphi/\partial r$ на ней. Земля не имеет в точности форму сферы; наибольшие отклонения от сферы связаны с ее эллиптичностью и возвышением и понижением твердой поверхности относительно уровня моря. Распределение плотности внутри Земли точно не известно, но много можно извлечь из данных о гравитационном поле вне Земли и из сведений о форме ее поверхности на основании наблюдений силы тяжести на суше. Отклонения поверхности, силы тяжести и гравитационного потенциала от симметричного распределения относительно центра Земли достаточно малы для того, чтобы в первом приближении можно было пренебречь их квадратами; величина каждого отклонения порядка $^1/_{200}$ или $^1/_{300}$ от среднего значения.

Гравитационный потенциал вне Земли можно записать в виде

$$U = \frac{fM}{r} + U', \qquad (1)$$

где f — постоянная тяготения, M — масса Земли, U' удовлетворяет уравнению Лапласа и стремится к нулю, как r^{-3}, для больших r при условии, что центр масс взят за начало координат. Ускорение свободной частицы равно $\operatorname{grad} U$. Но твердая Земля вращается с угловой скоростью ω, поэтому каждая ее частица будет иметь составляющую ускорения относительно невращающихся осей, равную

$$(-\omega^2 x,\ -\omega^2 y,\ 0) = -\operatorname{grad}\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = -\operatorname{grad}\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta. \qquad (2)$$

Следовательно, разность ускорений свободной частицы и частицы поверхности равна $\operatorname{grad}\Psi$, где

$$\Psi = U + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta. \tag{3}$$

Функция Ψ называется геопотенциалом. Поверхности постоянного Ψ являются уровенными поверхностями, а градиент Ψ есть наблюдаемое ускорение силы тяжести. На поверхности океанов Ψ постоянно, и эту постоянную мы обозначим через C. Возьмем некоторое стандартное значение r, которое мы точно определим позднее, и обозначим его через a. Сейчас нам достаточно только сказать, что любое значение r на поверхности Земли отличается от этого стандартного значения на величину первого порядка малости. Поскольку $\Psi - fM/r$ есть величина первого порядка малости, то она и ее производные изменятся только на величину второго порядка малости, если мы заменим $r = a$ на $r = a + r'$, где r' — величина первого порядка малости.

Если

$$\Psi = \frac{fM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta + U' = C - gh, \tag{4}$$

где h мало, и мы выберем a и g_0 такими, чтобы

$$C = \frac{fM}{a}, \quad g_0 = \frac{fM}{a^2}, \tag{5}$$

то с точностью до величины первого порядка

$$\frac{fM}{r} = C - g_0 r' \tag{6}$$

и

$$r' = h + \frac{1}{g_0}\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta + U'\right). \tag{7}$$

Мы покажем, что с точностью до величины первого порядка h есть измеряемая высота над уровнем моря. Обозначим второй член через h'; он представляет отклонение уровенной поверхности от сферы из-за вращения и присутствия высших гармоник в разложении потенциала.

В геодезии разность уровней dh измеряется по направлению внешней нормали к уровенной поверхности в точках наблюдения, поэтому вдоль профиля наблюдения изменение равно $-\int g\,dh$ (знак минус появляется из-за того, что g — градиент Ψ, направленный вниз). Ψ является однозначной функцией точки поверхности, но поскольку g изменяется, измеряемая высота данного места над уровнем моря будет слегка зависеть от пути

наблюдения, начинающегося на уровне моря. Однако для разных путей отклонения будут второго порядка по сравнению с отклонением от сферичности, и мы будем ими пренебрегать. Следовательно, на поверхности

$$\Psi = C - gh, \tag{8}$$

где g — местное значение ускорения силы тяжести, а h — измеряемая высота.

Ускорение силы тяжести на внешней поверхности равно

$$g^2 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{r\,\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{r \sin\theta\, d\lambda}\right)^2. \tag{9}$$

Здесь второй и третий члены — малые второго порядка. Следовательно, с точностью до малых первого порядка

$$g = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{fM}{r^2} - \frac{\partial U'}{\partial r} + \omega^2 r \sin^2\theta. \tag{10}$$

Ниже будет найдено соотношение между g_0 и средним значением ускорения силы тяжести и между a и средним радиусом. Из (4)

$$\frac{fM}{r} = g_0\left(a - \frac{gh}{g_0}\right) - U' - \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \sin^2\theta, \tag{11}$$

а из (10) и (11)

$$g = \frac{1}{fM}\left(\frac{fM}{r}\right)^2 - \frac{\partial U'}{\partial r} - \omega^2 a \sin^2\theta =$$

$$= g_0\left(1 - \frac{2gh}{ag_0}\right) - \frac{\partial U'}{\partial r} - \frac{2U'}{a} - 2\omega^2 a \sin^2\theta, \tag{12}$$

$$\frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{2U'}{a} = g_0 - g\left(1 + \frac{2h}{a}\right) - \frac{4}{3}\omega^2 a - 2\omega^2 a\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right). \tag{13}$$

В уравнении (13) левая часть выражена через значения g на внешней поверхности; но поскольку сама левая часть мала и внешняя поверхность близка к сфере, то ошибка из-за предположения, что (13) справедливо при $r = a$, будет второго порядка. Поправки первого порядка учтены в членах, содержащих h и ω^2.

Наблюдаемое значение ускорения силы тяжести выражается в виде $g(1 + 2h/a)$, что практически сводится к введению множителя $(a + h)^2/a^2$, представляющего собою поправку на то, что измерение проведено на некоторой высоте h над уровнем моря. Отсюда по закону обратных квадратов вычисляется значение g на уровне моря. Это правило, установленное Стоксом и позднее Гелмертом, называется редукцией в свободном воздухе.

Чтобы решить уравнение (13), рассмотрим вначале последний член. Если

$$U_1' = \frac{2\omega^2 a^5}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial r} + \frac{2U_1'}{a} = -2\omega^2 a\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) \qquad (r = a), \tag{15}$$

а так как

$$\frac{1}{3} - \cos^2\theta = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}p_2, \tag{16}$$

то U_1' является решением уравнения Лапласа.

Положим теперь

$$U' = U_1' + U_2', \tag{17}$$

$$g\left(1 + \frac{2h}{a}\right) = \gamma_0 + \sum_{n=2}^{\infty} g_{ns} S_{ns}, \tag{18}$$

$$U_2' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_{ns}}{r^{n+1}} S_{ns}. \tag{19}$$

Приравнивая коэффициенты, получим

$$g_0 = \gamma_0 + \frac{4}{3}\omega^2 a, \tag{20}$$

$$A_{ns} = \frac{a^{n+2}}{n-1} g_{ns}, \tag{21}$$

$$U' = \frac{2\omega^2 a^5}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{(n-1)\, r^{n+1}} g_{ns} S_{ns}. \tag{22}$$

Таким образом, U' определено. Высота уровня моря над стандартной сферой равна h'. Если на материке взять точку, лежащую под видимой поверхностью суши на глубине h, равной измеренной высоте точки наблюдения, то превышение этой точки над стандартной сферой будет равно h'. Геометрическое место таких точек называется *геоидом*.

Особый интерес представляет основной член, описывающий эллиптичность. Согласно уравнению (4), на геоиде выполняется соотношение

$$\frac{g_0 a^2}{r} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 + \frac{1}{2}\omega^2 a^2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) + U' = g_0 a, \tag{23}$$

откуда

$$r - a = \frac{1}{3}\frac{\omega^2 a^2}{\gamma_0} + \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a^2}{\gamma_0}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a g_{ns}}{(n-1)\,\gamma_0} S_{ns}. \tag{24}$$

Постоянные члены в формуле для r дают средний радиус, через который выражается величина a. Обозначим его через a_0 и пренебрежем всеми членами, кроме p_2. Обозначим экваториальный и полярный радиусы через $a_0(1+{}^1/_3 e)$ и $a_0(1-{}^2/_3 e)$, тогда для произвольной широты

$$r = a_0\left(1+\frac{1}{3}e\right)\sin^2\theta + a_0\left(1-\frac{2}{3}e\right)\cos^2\theta + O(e^2) =$$
$$= a_0\left[1 + e\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)\right] + O(e^2). \qquad (25)$$

Здесь e — эллиптичность. Сравнивая члены при $\frac{1}{3}-\cos^2\theta$, получим

$$e = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a_0}{\gamma_0} + \frac{g_{20}}{\gamma_0}, \qquad (26)$$

а ускорение силы тяжести, включая главный член с эллиптичностью, с точностью до первого порядка равно

$$\gamma_0\left[1-\left(\frac{5}{2}m-e\right)\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)\right], \qquad (27)$$

где $m = \omega^2 a_0/\gamma_0$ есть с той же точностью отношение центробежного ускорения на экваторе вследствие вращения Земли к ускорению силы тяжести. Это *формула Клеро*. Анализ гравиметрических измерений дает более точное значение величины e, чем из геодезических наблюдений. Распространение на случай более высоких гармоник принадлежит Стоксу.

Можно получить соотношение для разности между основными моментами инерции Земли. Мы знаем, что в формуле Мак-Кулло (**18.09**) отброшенные члены порядка r^{-4}, и поэтому они не могут содержаться ни в одном члене из S_{2s}. Следовательно, член с $\frac{1}{3}-\cos^2\theta$ в U' прямо связан с моментом инерции. Если мы положим $A = B$ и

$$I = A\sin^2\theta + C\cos^2\theta,\quad A+B+C-3I = (C-A)(1-3\cos^2\theta), \qquad (28)$$

то член, о котором идет речь, будет

$$J\frac{Ma^2}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right) = J\frac{\gamma_0 a^4}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right), \qquad (29)$$

где

$$J = \frac{3}{2}\frac{C-A}{Ma^2}. \qquad (30)$$

Но по (22) он равен

$$\left(\frac{2ma^4\gamma_0}{r^3}+\frac{a^4}{r^3}g_{20}\right)\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right). \qquad (31)$$

Следовательно,

$$J = \frac{g_{20}}{\gamma_0} - 2m = e - \frac{1}{2}m. \tag{32}$$

Величина J приблизительно равна 1/600. Из теории прецессии точек равноденствия известно, что $(C-A)/C$ имеет величину порядка 1/300, откуда C/Ma^2 порядка 1/3. Полученное значение этого отношения указывает на увеличение плотности Земли по направлению к центру.

Пренебрежение членами второго порядка, по-видимому, приводит к тому, что величины, рассчитанные по теории первого порядка, содержат ошибку порядка $^1/_{300}$. Современные наблюдения могут дать эти величины с большей точностью, и это заставляет ввести в теорию величины второго порядка малости.

24.12. Значение интеграла $\int\int p_n(\cos\theta)\, S_n(0, \lambda)\, d\omega$ на сфере. Мы знаем, что существует разложение

$$S_n = a_{n0}p_n + \sum_{s=1}^{n} p_n^s (a_{ns}\cos s\lambda + b_{ns}\sin s\lambda), \tag{1}$$

и поэтому

$$\int\int p_n(\cos\theta)\, S_n\, d\omega = a_{n0}\int\int (p_n)^2\, d\omega = \frac{4\pi a_{n0}}{2n+1}. \tag{2}$$

Так как все p_n^s обращаются в нуль при $\theta = 0$ для $s \geqslant 1$, то $S_n(0, \lambda) = a_{n0}$ для всех λ, т. е. a_{n0} есть значение $S_n(\theta, \lambda)$ на оси $\theta = 0$.

24.13. Преобразование координат зональной гармоники. Пусть ϑ — угловое расстояние от фиксированного направления $OP(\theta, \lambda)$. Угловые координаты точки на сфере (θ', λ'). На основании формул сферической тригонометрии имеем

$$\cos\vartheta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda). \tag{1}$$

Рассмотрим $p_n(\cos\vartheta)$. Это сферическая гармоника степени n относительно оси OP. Ее можно выразить через гармоники n-й степени от θ', λ'. Возьмем

$$p_n(\cos\vartheta) = a_0 p_n(\cos\theta') + \sum_{s=1}^{n} p_n^s(\cos\theta')(a_s\cos s\lambda' + b_s\sin s\lambda'). \tag{2}$$

Интегрируя по единичной сфере, получим

$$\int\int p_n(\cos\vartheta)\, p_n(\cos\theta')\, d\omega = \frac{4\pi a_0}{2n+1}, \tag{3}$$

$$\int\int p_n(\cos\vartheta)\, p_n^s(\cos\theta')(\cos s\lambda',\ \sin s\lambda')\, d\omega = \\ = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{n!\,n!}(a_s,\ b_s). \tag{4}$$

Если в последней формуле предыдущего раздела мы заменим $S_n(\theta, \lambda)$ на $p_n^s(\cos\theta')\cos s\lambda'$ и θ на ϑ, то получим

$$\int\int p_n(\cos\vartheta)\, p_n^s(\cos\theta')\cos s\lambda'\, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} p_n^s(\cos\theta)\cos s\lambda \tag{5}$$

с теми же следствиями, откуда

$$(a_s,\ b_s) = 2\frac{n!\,n!}{(n-s)!\,(n+s)!} p_n^s(\cos\theta)(\cos s\lambda,\ \sin s\lambda), \tag{6}$$

за исключением a_0, у которого нет множителя 2. Теперь

$$p_n(\cos\vartheta) = p_n(\cos\theta)\, p_n(\cos\theta') + \\ + 2\sum_{s=1}^{n}\frac{n!\,n!}{(n-s)!\,(n+s)!} p_n^s(\cos\theta)\, p_n^s(\cos\theta')\cos s(\lambda'-\lambda).$$

Этот результат принадлежит Лежандру и часто называется *теоремой сложения* для сферических гармоник; $p_n(\cos\vartheta)$ называется *двухосной (биаксиальной) гармоникой*.

24.131. Следствие, полученное из преобразования в двухмерном пространстве. В задачах волновой механики о сложных атомах необходимо изучить свойства преобразования выражения $p_n^s(\cos\theta)\, e^{is\lambda}$ при вращении. Это можно сделать с помощью метода **4.102**, связывающего вращение в 3-мерном пространстве с унитарным преобразованием двух переменных.

Поскольку $\dfrac{\partial^{l+m+n}}{\partial x^l\,\partial y^m\,\partial z^n}\dfrac{1}{r}$ преобразуется как $a^l b^m c^n$, где a, b, c — компоненты некоторого вектора и $\nabla^2(1/r) = 0$, мы можем наложить на вектор (a, b, c) ограничение, считая, что он комплексный нуль-вектор. Тогда мы будем иметь следующую аналогию свойств преобразования для положительного или равного нулю s:

$$K_{-n-1}^{s} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s}\frac{1}{r} \text{ как } (a+ib)^s c^{n-s}, \text{ как } x_1^{n-s}x_2^{n+s}, \tag{1}$$

$$(-1)^s K_{-n-1}^{-s} = K_{-n-1}^{s*} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s}\frac{1}{r},$$

$$\text{как } (a-ib)^s c^{n-s}, \text{ как } (-1)^s x_1^{n+s}x_2^{n-s}. \tag{2}$$

Таким образом, для всех s независимо от их знака функции K^s_{-n-1} преобразуются как $x_1^{n-s}x_2^{n+s}$. Выражение $x_1^*x_1 + x_2^*x_2$ инвариантно, значит инвариантно и $(x_1^*x_1 + x_2^*x_2)^{2n}$, и

$$\sum_{s=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(n-s)!\,(n+s)!} (x_1^*x_1)^{n-s} (x_2^*x_2)^{n+s}. \tag{3}$$

Если мы обозначим

$$X_s = \frac{x_1^{n-s}x_2^{n+s}}{[(n-s)!\,(n+s)!]^{1/2}}, \tag{4}$$

то $\sum_s X_s^* X_s$ инвариантно относительно унитарного преобразования x_1, x_2 и преобразование X_s также является унитарным. Отсюда следует, что выражение

$$(n!)^2 \sum_{s=-n}^{n} \frac{p_n^s(\mu)\, p_n^s(\mu')}{(n-s)!\,(n+s)!} e^{is(\lambda'-\lambda)} \tag{5}$$

инвариантно. Если мы повернем оси так, чтобы θ' стало равным нулю, $\theta = \vartheta$, все $p_n^s(\mu')$ обратятся в нуль для $s \neq 0$, а $p_n(\mu') = 1$, то мы снова получим

$$p_n(\cos\vartheta) = p_n(\cos\theta)\, p_n(\cos\theta') + 2\sum_{s=1}^{n} \frac{n!\,n!}{(n-s)!\,(n+s)!} p_n^s(\cos\theta)\, p_n^s(\cos\theta') \cos s(\lambda - \lambda'). \tag{6*}$$

24.14. Связь с функциями Бесселя. Рассмотрим окрестность полюса сферы большого радиуса a. Поскольку кривизна поверхности сферы мала, можно надеяться, что соответствующие потенциальные функции будут хорошо аппроксимироваться функциями в цилиндрических координатах, в которых z соответствует $r - a$, $\bar{\omega}$ соответствует $a\sin\theta$ и $\lambda \to \lambda$. Множитель, содержащий r, для малых $(r-a)/a$ можно записать приближенно в виде

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \doteqdot e^{-nz/a} = e^{-\varkappa z}, \tag{1}$$

где $n = \varkappa a$. Пренебрегая разницей между θ и $\sin\theta$, для множителя, содержащего θ, на основании **18.06** (6) будем иметь уравнение

$$\bar{\omega}\frac{d}{d\bar{\omega}}\left(\bar{\omega}\frac{dy}{d\bar{\omega}}\right) + \left(\frac{n^2\bar{\omega}^2}{a^2} - s^2\right) y = 0, \tag{2}$$

*) Формула преобразования присоединенных функций Лежандра при повороте, заданном углами Эйлера, получена Б. Джеффрис [7].

решением которого, конечным при $\bar{\omega} = 0$, является $J_s(\varkappa\bar{\omega})$. Следовательно, решению $r^{-n-1}p_n^s(\cos s\lambda, \sin s\lambda)$ соответствует в цилиндрических координатах решение $e^{-\varkappa z}J_s(\varkappa\bar{\omega})(\cos s\lambda, \sin s\lambda)$. Употребляемый для бесселевых функций индекс n соответствует индексу s для функций Лежандра. Значительная ошибка может появиться в том случае, когда θ достаточно велико и нельзя пренебречь разницей между $\sin\theta$ и θ. Постоянный множитель можно получить с помощью **24.04** (21); действительно, первый член в p_n^s равен

$$\frac{1}{2^s}\frac{(n+s)!}{s!\,n!}\sin^s\theta \doteqdot \frac{\left(\frac{1}{2}n\sin\theta\right)^s}{s!}, \tag{3}$$

если n велико по сравнению с s, а это есть первый член функции $J_s(n\sin\theta)$. Следовательно, для данного $n\theta$, когда $n\to\infty$,

$$p_n^s(\mu) \to J_s(n\sin\theta). \tag{4}$$

В том же приближении множитель $(n!)^2/(n-s)!\,(n+s)!$ в формуле преобразования координат стремится к 1, а $a\sin\vartheta - к\,\varkappa R$, где R — расстояние между двумя точками на плоскости. Тогда

$$J_0\left[\varkappa\sqrt{\bar{\omega}^2+\rho^2-2\bar{\omega}\rho\cos(\lambda-\lambda')}\right] =$$

$$= J_0(\varkappa\bar{\omega})\,J_0(\varkappa\rho) + \sum_{s=1}^{\infty} J_s(\varkappa\bar{\omega})\,J_s(\varkappa\rho)\cos s(\lambda-\lambda'). \tag{5}$$

Эта теорема сложения для функций Бесселя, впервые найденная Гейне с помощью описанного предельного перехода. Заметим еще, что из **24.04** (19) получается

$$J_{-s}(\varkappa\bar{\omega}) = (-1)^s J_s(\varkappa\bar{\omega}). \tag{6}$$

Это соотношение для функций Бесселя ранее уже было найдено для случая целого s.

24.15. Асимптотическая формула для большого n и не малого θ. В дифференциальном уравнении для p_n^s

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{dy}{d\theta} - s^2\operatorname{cosec}^2\theta y + n(n+1)y = 0$$

можно исключить член с y' с помощью подстановки

$$y = \sin^{-1/2}\theta z. \tag{1}$$

Тогда получим

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(s^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{cosec}^2\theta\right]z = 0. \tag{2}$$

Если n велико, а s не велико, то асимптотическим решением будет

$$y \sim \sin^{-1/2}\theta e^{\pm (n+1/2)i\theta}. \tag{3}$$

Здесь связь с функцией $J_s\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]$ еще более тесная, чем с $J_s(n\sin\theta)$ в случае малых θ. Постоянные легко определяются, поскольку можно выбрать θ так, чтобы $n\theta$ было большим, а $n\theta^3$ малым. Сравнивая затем со стоксовым асимптотическим разложением функции J_s [см. **21.05** (5)] в этой области, получим

$$J_s\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta\right] \sim \left[\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}\right]^{1/2} \cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta - \tfrac{1}{2}s\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right]. \tag{4}$$

Отсюда

$$p_n^s(\mu) \sim \left[\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\theta}\right]^{1/2} \cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta - \tfrac{1}{2}s\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right], \tag{5}$$

где θ не близко к нулю или π. Полное разложение такого рода дал Гобсон, конечно, с другими коэффициентами, так как он исходил из своего определения функций. К сожалению, на практике индекс s, если он не равен нулю, как правило, сравним с n, а так как разложение стоксовского типа идет по степеням s^2/n, его поэтому употребляют не часто. В действительности приближение полностью перестает быть верным при $s=n$, когда функция не имеет нулей между 0 и π.

24.16. Представление в виде определенного интеграла. Если функция $f(t)$ аналитическая внутри C и точка z внутри C, то

$$f^{(n)}(z) = = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt. \tag{1}$$

Отсюда

$$p_n^s(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\,\frac{(n-s)!}{2^n(n!)^2}\,\frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n =$$

$$= \frac{(n-s)!\,(n+s)!}{2^n(n!)^2}\,\frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}}{2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-\mu)^{n+s+1}}\,dt \tag{2}$$

при условии, что μ лежит внутри C. Поскольку n до сих пор считалось целым положительным числом, то в точках $t=\pm 1$ нет особенности и можно взять путь C как угодно большим.

Но даже в случае, когда n и s не целые, легко проверить, что выражение (2) удовлетворяет дифференциальному уравнению для $p_n^s(\mu)$. Оно также справедливо для неограниченных значений μ, если путь интегрирования C таков, что подынтегральная функция возвращается к своему исходному значению, описав путь C.

Интеграл (2) выведен Шлефли и связан с интегралом Шлефли для функций Бесселя. Действительно, если мы положим $t-\mu=\lambda$, то

$$p_n^s(\mu)=\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{2^n n!\,n!}\,\frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}}{2\pi i}\int_C\left(2\mu+\lambda+\frac{\mu^2-1}{\lambda}\right)^n\frac{d\lambda}{\lambda^{s+1}}, \quad (3)$$

а положив $\lambda=(1-\mu^2)^{1/2}u$, получим

$$p_n^s(\mu)=\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{2^n n!\,n!}\,\frac{1}{2\pi i}\int\left[2\mu+(1-\mu^2)^{1/2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]^n\frac{du}{u^{s+1}}. \quad (4)$$

Если $(1-\mu^2)^{1/2}$ мало, контур интегрирования фиксирован, а n велико, то последний интеграл приближенно равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\exp\left[\frac{1}{2}n(1-\mu^2)^{1/2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]\frac{du}{u^{s+1}}, \quad (5)$$

а это и есть интеграл Шлефли для $J_s(n\sin\theta)$. Здесь множитель $e^{n(1-\mu)}$ заменен на 1 и в этом приближении принято, что $n\theta$ невелико, а $n\theta^2$ мало.

Если n и s целые, а μ комплексное, можно взять в качестве C окружность в плоскости t с центром в точке μ и радиусом, равным $|(\mu^2-1)|^{1/2}$. Вообще говоря, одна из точек $t=\pm 1$ находится внутри, а другая вне C. Полагая

$$t=\mu+(\mu^2-1)^{1/2}e^{i\varphi}, \quad (6)$$

получим

$$p_n^s(\mu)=\frac{(n-s)!\,(n+s)!}{2^n(n!)^2}\,\frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[\mu-1+(\mu^2-1)^{1/2}e^{i\varphi}]^n\,[\mu+1+(\mu^2-1)^{1/2}e^{i\varphi}]^n}{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}(n+s)}\,e^{(n+s)i\varphi}}\,d\varphi. \quad (7)$$

Но

$$\left[(\mu-1)e^{-\frac{1}{2}i\varphi}+(\mu^2-1)^{1/2}e^{\frac{1}{2}i\varphi}\right]\left[(\mu+1)e^{-\frac{1}{2}i\varphi}+(\mu^2-1)^{1/2}e^{\frac{1}{2}i\varphi}\right]=$$

$$=(\mu^2-1)(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+2\mu(\mu^2-1)^{1/2}=$$

$$=2(\mu^2-1)^{1/2}[\mu+(\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi]. \quad (8)$$

Поэтому

$$p_n^s(\mu) = \frac{(n-s)!\,(n+s)!}{(n!)^2}\,\frac{i^{\pm s}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\mu+(\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n e^{-si\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{(n-s)!\,(n+s)!}{(n!)^2}\,\frac{i^{\pm s}}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\mu+(\mu^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n\cos s\varphi\,d\varphi. \qquad (9)$$

Степени $\cos\varphi$ до $(s-1)$-й после интегрирования дадут нуль, а если мы заменим $(\mu^2-1)^{1/2}$ на $i(1-\mu^2)^{1/2}$, то i^{-s} выйдет за знак интеграла. Это — *интеграл Лапласа*. Необходимо заметить, что подынтегральное выражение по модулю $\leqslant 1$ для $-1\leqslant\mu\leqslant 1$, и поэтому $|p_n(\mu)|\leqslant 1$. Этот интеграл дает только одно решение дифференциального уравнения. Если мы поменяем знак у i на обратный и положим $\varphi=\pi-\psi$, то получим тот же самый интеграл, за исключением, может быть, знака. Аналогично для (2): если путь C содержит внутри себя μ, то получается p_n^s, а если C не содержит μ, то интеграл равен нулю для n и s целых. Нет смысла брать путь интегрирования, уходящий на бесконечность, так как при этом интеграл расходится. Другое решение может быть получено, если n не является положительным целым числом, но при этом возникает трудность выбора такого пути интегрирования, чтобы подынтегральное выражение было однозначной функцией. Полное исследование этого случая дано Гобсоном. Независимо от того, что происходит во многих других случаях, мы не можем получить новое фундаментальное решение варьированием пути интегрирования, когда n, s целые и положительные.

24.161. Другой метод состоит в следующем. Рассмотрим

$$(1-2h\mu+h^2)^{-1/2} = \sum h^n p_n \quad (h<1), \qquad (10)$$

$$\frac{d^s}{d\mu^s}(1-2h\mu+h^2)^{-1/2} = \sum h^n(1-\mu^2)^{-1/2s}\,p_n^s = \qquad (11)$$

$$= 2^s h^s\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ldots\left(s-\frac{1}{2}\right)(1-2h\mu+h^2)^{-s-1/2}, \qquad (12)$$

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2s-1)}{(1-2h\mu+h^2)^{s+\frac{1}{2}}} = \sum h^{n-s}\,\frac{n}{(n-s)!}\,p_n^s, \qquad (13)$$

$$p_n^s = \frac{(n-s)!}{n!}\,1\cdot 3\ldots(2s-1)\,\frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_C \frac{dh}{h^{n-s+1}(1-2h\mu+h^2)^{s+\frac{1}{2}}}, \qquad (14)$$

где путь C окружает начало координат, но не включает точки $h = e^{\pm i\theta}$. Чтобы проверить, что (14) удовлетворяет дифференциальному уравнению, положим

$$p_n^s = A(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}\,\Theta, \tag{15}$$

где A — постоянный множитель, а

$$1 - 2h\mu + h^2 = X, \tag{16}$$

тогда

$$(1-\mu^2)\Theta'' - 2(s+1)\mu\Theta' + (n-s)(n+s+1)\Theta =$$
$$= \int_C \left[\frac{(2s+1)(2s+3)(1-\mu^2)}{h^{n-s-1}X^{s+5/2}} - \frac{2(s+1)(2s+1)\mu}{h^{n-s}X^{s+3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-s)(n+s+1)}{h^{n-s+1}X^{s+\frac{1}{2}}}\right] dh. \tag{17}$$

Теперь

$$1 - \mu^2 = X - (\mu - h)^2, \quad \frac{\partial X}{\partial h} = -2(\mu - h). \tag{18}$$

Исключим μ, интегрируя по частям. Для этого представим (17) в виде

$$\int_C \left\{(2s+1)(2s+3)\left[\frac{1}{h^{n-s-1}X^{s+\frac{3}{2}}} - \frac{(\mu-h)^2}{h^{n-s-1}X^{s+\frac{5}{2}}}\right] - \right.$$
$$-2(s+1)(2s+1)\left(\frac{\mu-h}{h^{n-s}X^{s+\frac{3}{2}}} + \frac{1}{h^{n-s-1}X^{s+\frac{3}{2}}}\right) +$$
$$\left. + \frac{(n-s)(n+s+1)}{h^{n-s+1}X^{s+\frac{1}{2}}}\right\} dh. \tag{19}$$

Тогда

$$-\int_C \left[\frac{(2s+1)(2s+3)(\mu-h)^2}{h^{n-s-1}X^{s+5/2}} + \frac{2(s+1)(2s+1)(\mu-h)}{h^{n-s}X^{s+3/2}}\right] dh =$$
$$= -\left[\frac{(2s+1)(\mu-h)}{h^{n-s-1}X^{s+3/2}}\right] - (2s+1)\int_C \left[\frac{(n-s-1)(\mu-h)}{h^{n-s}X^{s+3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h^{n-s-1}X^{s+3/2}} + \frac{2(s+1)(\mu-h)}{h^{n-s}X^{s+3/2}}\right] dh =$$
$$= -\left[\quad\right] - (2s+1)\int_C \left[\frac{(n+s+1)(\mu-h)}{h^{n-s}X^{s+3/2}} + \frac{1}{h^{n-s-1}X^{s+3/2}}\right] dh =$$
$$= -\left[\quad\right] - \left[\frac{n+s+1}{h^{n-s}X^{s+1/2}}\right] - (n+s+1)(n-s)\times$$
$$\times \int_C \frac{dh}{h^{n-s+1}X^{s+1/2}} - (2s+1)\int \frac{dh}{h^{n-s-1}X^{s+3/2}}. \tag{20}$$

Первый из оставшихся интегралов сокращается с последним членом (19); второй интеграл вместе с оставшимися членами (19) дает выражение, содержащее множитель

$$(2s+1)(2s+3)-2(s+1)(2s+1)-(2s+1)=0.$$

Следовательно,

$$(1-\mu^2)\Theta''-2(s+1)\mu\Theta'+(n-s)(n+s+1)\Theta=$$
$$=-\left[\frac{(2s+1)(\mu-h)}{h^{n-s-1}X^{s+3/2}}+\frac{n+s+1}{h^{n-s}X^{s+1/2}}\right], \quad (21)$$

и интеграл будет удовлетворять дифференциальному уравнению при условии, что выражение в квадратных скобках принимает первоначальное значение при обходе контура интегрирования. Это справедливо не только для целых значений h и s. В частности, контур C может быть петлей, идущей из бесконечности вокруг одной из особенностей при $h=0$ или $e^{\pm i\theta}$ для $n+s+1>0$. Если $n-s$ — целое число, то (21) обратится в нуль, если C — замкнутый контур около начала координат, не содержащий других особенностей, а подынтегральное выражение будет однозначной функцией, если разорвать контур и дополнить его двумя линиями, уходящими на бесконечность, такими, что интегралы по ним взаимно уничтожаются. Следовательно, если взять контур интегрирования в виде петли, идущей из бесконечности вокруг O, то это позволит определить p_n^s, когда n и s — дробные числа ($n+s+1>0$); в случае целых n, s это приводит к предыдущему определению.

Если n и s целые, то интеграл по большому кругу будет равен нулю, и мы сможем заменить C на путь, обходящий точки $h=\exp(\pm i\theta)$. Обычно всегда заменяют путь на дугу окружности $|h|=1$ около начала координат, соединяющую точки $h=\exp(\pm i\theta)$. В результате получается *интеграл Мелера*; очевидно, он расходится для $s\geqslant 1/2$. С другой стороны, мы можем заменить s на $-s$, но тогда множитель вне интеграла будет пропорционален $(1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}s}$, что неудобно для функции, которая ведет себя как $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}$ для μ, близких к ± 1. Интегралы этого вида могут быть полезны на практике только при $s=0$, и тогда

$$p_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{[2(\cos\psi-\cos\theta)]^{1/2}}\,d\psi, \quad (22)$$

$$p_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{[2(\cos\theta-\cos\psi)]^{1/2}}\,d\psi. \quad (23)$$

Эти формулы принадлежат Мелеру.

24.162. Интеграл Бейтмана. Другой вид решения в форме определенного интеграла дал Бейтман. Изменим несколько его метод, положив

$$R^2 = x^2 + y^2 + (z-a)^2. \tag{24}$$

Если a и b — малые постоянные, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{x^2 + y^2 + (z-a)^2 + (w-b)^2} \tag{25}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-s} \frac{1}{R} =$$

$$= (-1)^s \frac{2^n n!}{\pi} \int \frac{(x+iy)^s\,[z-a+i(w-b)]^{n-s}}{[x^2+y^2+(z-a)^2+(w-b)^2]^{n+1}}\,dw. \tag{26}$$

Но $1/R$ — функция от $z-a$ и не зависит от b. Поэтому оператор $\partial/\partial b$ дает 0, а $\partial/\partial a$ эквивалентно $-\partial/\partial z$; если мы устремим a и b к 0, то получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^s \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \frac{1}{r} =$$

$$= (-1)^n \frac{2^n n!}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+iy)^s\,(z+iw)^{n-s}}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^{n+1}}\,dw. \tag{27}$$

Левая часть равна

$$(-1)^n n! \frac{p_n^s e^{is\lambda}}{r^{n+1}},$$

поэтому

$$p_n^s = \frac{2^n}{\pi} \sin^s\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu + iw/r)^{n-s}}{(1+w^2/r^2)^{n+1}} \frac{dw}{r} =$$

$$= \frac{2^n}{\pi} \sin^s\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu+it)^{n-s}}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt. \tag{28}$$

Этот интеграл сходится для $s>0$, если $(n+s)>0$ и μ не чисто мнимое. Но если даже μ чисто мнимое, то при $n>s-1$ точка $t=-i\mu$ не приведет к расходимости. Это позволяет определить функцию для всех практических случаев. Положив $\lambda = it$, получим

$$p_n^s = \frac{2^n}{\pi i} \sin^s\theta \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(\lambda+\mu)^{n-s}}{(1-\lambda^2)^{n+1}}\,d\lambda. \tag{29}$$

Если мы используем другой путь интегрирования, то интеграл еще может удовлетворять дифференциальному уравнению. Действительно, положим

$$\Theta = \int \frac{(\mu + it)^{n-s}}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt, \tag{30}$$

$$(1-\mu^2)\Theta'' - 2(s+1)\mu\Theta' + (n-s)(n+s+1)\Theta =$$

$$= \int \frac{\begin{array}{r}(n-s)(n-s-1)(1-\mu^2)(\mu+it)^{n-s-2} - 2(n-s)(s+1)\mu(\mu+it)^{n-s-1} + \\ + (n-s)(n+s+1)(\mu+it)^{n-s}\end{array}}{(1+t^2)^{n+1}} dt, \tag{31}$$

$n-s$ — общий множитель, а

$$(n-s-1)(1-\mu^2) - 2(s+1)\mu(\mu+it) + (n+s+1)(\mu+it)^2 =$$

$$= n-s-1+2n\mu it - (n+s+1)t^2 =$$

$$= n-s-1+2int(\mu+it) + 2nt^2 - (n+s+1)t^2 =$$

$$= (n-s-1)(1+t^2) + 2int(\mu+it),$$

$$\frac{[(n-s-1)(1+t^2)+2int(\mu+it)](\mu+it)^{n-s-2}}{(1+t^2)^{n+1}} = -i\frac{d}{dt}\frac{(\mu+it)^{n-s-1}}{(1+t^2)^n}.$$

Следовательно,

$$(1-\mu^2)\Theta'' - 2(s+1)\mu\Theta' + (n-s)(n+s+1)\Theta =$$

$$= \left[-i(n-s)\frac{(\mu+it)^{n-s-1}}{(1+t^2)^n}\right]. \tag{32}$$

Правая часть обращается в нуль для любого пути с бесконечными пределами, если только $n+s+1>0$. Выбранный путь интегрирования для p_n^s проходит между двумя особенностями в точках $t=\pm i$; мы могли бы получить другое решение, если бы взяли путь от $t=i\mu$ до бесконечности. Члены, получающиеся при дифференцировании по пределам интегрирования, обращаются в нуль, если $s<n-1$. Для $s=n$ они обращаются в нуль, для $s=n-1$ они сокращаются с правой частью (32). Следовательно, (30) с пределами $i\mu$, ∞ является решением для $n+s+1<0$, $n-s+1>0$.

24.17. Случай недействительного μ вне $[-1, 1]$. В большинстве приложений уравнения Лежандра требуются только решения p_n^s. Другое решение, возможно с нецелыми значениями n, может встретиться в задачах со сферической границей, когда полюса уже исключены, а также во внешних задачах для сфероидальных областей. μ принимает действительные значения больше 1 для области, внешней к вытянутому сфероиду, и чисто мнимые значения в области, внешней относительно сплюснутого сфероида. При этом абсолютная величина μ может быть произвольно велика. Поэтому

удобно заменить множитель $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}s}$ на $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}$ и взять первое решение в виде

$$t_n^s(\mu)=\frac{(n-s)!}{2^n(n!)^2}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n. \tag{1}$$

Это решение принимает действительные положительные значения при всех $\mu>1$. С помощью соотношения **24.162** (29) мы находим выражение

$$t_n^s(\mu)=\frac{2^n}{\pi i}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{(\lambda+\mu)^{n-s}}{(1-\lambda^2)^{n+1}}\,d\lambda, \tag{2}$$

которое может быть продолжено на все значения n, s, удовлетворяющие неравенству $n+s+1>0$.

Производя замены переменных $\lambda=-\mu-v$, $v=-(\mu^2-1)^{1/2}w$, мы преобразуем выражение (2) к виду

$$\begin{aligned}t_n^s(\mu)&=\frac{2^n}{\pi i}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{(-v)^{n-s}\,dv}{(1-\mu^2-v^2-2\mu v)^{n+1}}=\\&=\frac{1}{2\pi i}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}(-v)^{-s-1}\left(\mu+\frac{\mu^2-1}{2v}+\frac{v}{2}\right)^{-(n+1)}dv=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}w^{-s-1}\left[\mu-\frac{1}{2}(\mu^2-1)^{1/2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]^{-n-1}dw.\end{aligned} \tag{3}$$

Используя соотношение **21.01** (6), находим так же, как и при выводе формулы **24.16** (5), что при действительном $\mu>1$ полученное выражение стремится к $I_s\left[n(\mu^2-1)^{1/2}\right]$ при фиксированном значении величины $n(\mu^2-1)^{1/2}$ и $n\to\infty$. Путь интегрирования всегда должен выбираться таким образом, чтобы он проходил между полюсами подынтегральной функции, которые в нашем случае стремятся к 0 и $+\infty$.

Второе решение при положительных $n-s+1$ и $n+s+1$ наиболее удобно взять в виде

$$q_n^s(\mu)=\frac{2^{n+1}}{\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{(u-\mu)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du, \tag{4}$$

причем путь интегрирования не должен пересекать действительную ось в интервале от -1 до $+1$.

В плоскости переменного μ с разрезом от -1 до $+1$ $q_n^s(\mu)$ будет однозначной аналитической функцией всюду, за исключением точки на разрезе. Полагая $u-\mu=\lambda$, получим

$$q_n^s(\mu)=\frac{1}{\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{-s-1}\left[\mu+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2-1}{\lambda}+\lambda\right)\right]^{-(n+1)}d\lambda. \tag{5}$$

Обозначая $n(\mu^2-1)^{1/2}=x$, мы так же, как при выводе соотношения **24.16** (5), используя соотношение **21.022** (60), находим при $n\to\infty$, $\mu\to 1+$:

$$q_n^s(\mu)\to \mathrm{Kh}_{-s}(x)=\mathrm{Kh}_s(x). \tag{6}$$

Таким образом, функция $q_n^s(\mu)$, определенная соотношением (4), связана с функцией $\mathrm{Kh}_s\left(n\sqrt{\mu^2-1}\right)$ так же, как t_n^s с функцией I_s, а p_n^s с функцией J_s.

Полагая в выражении (4)

$$u=\frac{\mu}{1-v},$$

получим

$$q_n^s(\mu)=\frac{2^{n+1}}{\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\int_0^1 \mu^{-n-s-1}v^{n-s}(1-v)^{n+s}\left[1-\frac{(1-v)^2}{\mu^2}\right]^{-n-1}dv.$$

Разлагая подынтегральную функцию по степеням μ^{-2} и почленно интегрируя полученный ряд, находим

$$q_n^s(\mu)=\frac{2^{n+1}}{\pi}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\mu^{-n-s-1}\frac{(n-s)!}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{m!}\frac{(n+s+2m)!}{(2n+1+2m)!}\mu^{-2m}. \tag{7}$$

Этот ряд сходится при $|\mu^2|>1$.

Функцию q_n^s можно представить конечным числом членов. Рассмотрим сначала случай $s=0$; при этом $t_n(\mu)=p_n(\mu)$. Оба корня определяющего уравнения при $\mu=\pm 1$ равны нулю, и дифференциальное уравнение не имеет других особых точек. Поэтому решение уравнения Лежандра имеет вид

$$\Theta=At_n(\mu)\ln(\mu-1)+Bt_n(\mu)\ln(\mu+1)+Ct_n(\mu)-f_n(\mu), \tag{8}$$

где $f_n(\mu)$ — аналитическая в точках $\mu=\pm 1$ и, следовательно, целая функция. Но функции $t_n(\mu)$ и $q_n(\mu)$ однозначны при $|\mu|>1$, и, следовательно, $A=-B$. Если $\Theta=q_n(\mu)$, то $\Theta=O(\mu^{-n-1})$ при больших значениях $|\mu|$, а $t_n(\mu)$ — полином степени n. Тогда сумма двух первых членов будет величиной порядка μ^{n-1}. Положим $C=0$. Значит, Θ будет стремиться к нулю при $|\mu|\to\infty$ тогда и только тогда, если

$$q_n(\mu)=B\left[t_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-f_n(\mu)\right], \tag{9}$$

где $f_n(\mu)$ совпадает с разложением первого члена в квадратных скобках по убывающим степеням μ вплоть до постоянного члена. Очевидно, что $f_n(\mu)$ — полином степени $n-1$ (коэффициенты при степенях от μ^{-1} до μ^{-n}, очевидно, обратятся в нуль).

Для определения постоянной B вернемся к соотношению (7) при $s=0$ и заметим, что при больших m

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\frac{(n+m)!}{m!}\frac{(n+2m)!}{(2n+1+2m)!}\mu^{-2m}=\frac{1}{\pi}\mu^{-2m}\left[\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}\mu^{-2m}\left[\frac{1}{2m+1}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right], \tag{10}$$

и поэтому при $|\mu|>1$

$$q_n(\mu)=\mu^{-n}\left[\frac{1}{\pi}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}+O(1)\right]. \tag{11}$$

Сравнивая с выражением (9) и учитывая, что $t_n(1)=1$, находим $B=1/\pi$. Окончательно

$$q_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\left[t_n(\mu)\ln\frac{\mu+1}{\mu-1}-f_n(\mu)\right]. \tag{12}$$

Отсюда с помощью соотношения

$$q_n^s(\mu)=(-1)^s\frac{(n-s)!}{n!}(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}\frac{d^s}{d\mu^s}q_n(\mu) \tag{13}$$

можно выразить в конечном виде функцию $q_n^s(\mu)$.

Следует отметить, что при дифференцировании возникнут члены $(\mu-1)^{-s}$ и $(\mu+1)^{-s}$ и результат умножается на величину $(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}s}$. Поэтому вблизи значений $\mu=\pm 1$ $q_n^s(\mu)\to\infty$ как $(\mu^2-1)^{-\frac{1}{2}s}$.

Другое выражение для $q_n(\mu)$ в виде определенного интеграла может быть получено следующим образом. Исходным пунктом служит соотношение

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}h^nq_n(\mu)=\frac{2}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\sum\frac{2^n(u-\mu)^nh^n}{(u^2-1)^{n+1}}du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{du}{u^2-1-2uh+2\mu h}=\frac{2}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{du}{(u-h)^2-(1-2\mu h+h^2)},$$

получающееся путем суммирования ряда под знаком интеграла, что возможно при всех действительных значениях переменных, удовлетворяющих неравенству $u>\mu>1$, при $|h|>1$. Отсюда получаем производящую функцию для $q_n(\mu)$ в виде

$$S=\frac{1}{\pi(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}\ln\frac{\mu-h+(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}{\mu-h-(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}. \tag{14}$$

Далее рассмотрим ряд

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\int_{-1}^{1}\frac{p_n(\nu)}{\mu-\nu}d\nu=\int_{-1}^{1}\frac{d\nu}{(1-2\nu h+h^2)^{1/2}(\mu-\nu)}, \tag{15}$$

который при помощи подстановки

$$1-2\nu h+h^2=v^2 \tag{16}$$

преобразуется к виду

$$T=-2\int_{1-h}^{1+h}\frac{dv}{1-2\mu h+h^2-v^2}=$$

$$=-\frac{1}{(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}\left[\ln\frac{(1-2\mu h+h^2)^{1/2}+v}{(1-2\mu h+h^2)^{1/2}-v}\right]_{1-h}^{1+h}=$$

$$=\frac{1}{(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}\ln\frac{\mu-h+(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}{\mu-h-(1-2\mu h+h^2)^{1/2}}=\pi S. \tag{17}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при h^n, находим

$$q_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_n(\nu)}{\mu - \nu}\, d\nu. \tag{18}$$

Заметим, что при четном n функция $t_n(\mu)$ четная, а $q_n(\mu)$ нечетная; при нечетном n соотношение обратное. Приведем явный вид нескольких простейших функций q_n:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}, \\ q_1 &= \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{2}{\pi}, \\ q_2 &= \frac{p_2}{\pi} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{3\mu}{\pi}, \\ q_3 &= \frac{p_3}{\pi} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{1}{\pi}\left(5\mu^2 - \frac{4}{3}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

24.171. Асимптотика при больших n. Ряды **24.17** (7) сходятся, и поэтому не возникает необходимости в аппроксимациях стоксовского типа при заданных n и s и больших значениях $|\mu|$. Чтобы выяснить поведение функций при заданном μ и возрастающих значениях параметров n и s, можно применить метод наискорейшего спуска к интегралу **24.17** (4).

Введем функции

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= (n-s)\ln(u-\mu) - n\ln(u^2-1), \\ \varphi'(u) &= \frac{n-s}{u-\mu} - \frac{2nu}{u^2-1}, \\ \varphi''(u) &= -\frac{n-s}{(u-\mu)^2} - \frac{2n}{u^2-1} + \frac{4nu^2}{(u^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Условие для седловой точки имеет вид

$$(n+s)\,u = n\mu + [n^2(\mu^2-1) + s^2]^{1/2} = n\mu + M,$$

поскольку нам требуется корень, больший чем μ при μ действительном и > 1. Получаем соотношение

$$q_n^s(\mu) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (\mu^2-1)^{1/2s} \left(\frac{n-s}{n}\right)^{n+1/2} \cdot M^{-1/2} \frac{(n+s)^{n+s+1/2}}{(M-s\mu)^s\,(M+n\mu)^{n+1/2}}, \tag{20}$$

справедливое, если величина $u-\mu$ в седловой точке в несколько раз превосходит $|\varphi''(u)|^{-1/2}$. Это условие выполняется, если

$$\frac{n^2-s^2}{n} \frac{M}{n\mu+M} \gg 0. \tag{21}$$

Легко проверить, что когда велико только n, полученное приближение сводится к

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{n^{1/2}(\mu^2-1)^{1/4}} \left(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\right)^{-(n+1/2)}. \tag{22}$$

При

$$n(\mu^2-1)^{1/2} = x \tag{23}$$

это выражение приблизительно равно $(2/\pi x)^{1/2} e^{-x}$, что совпадает с первым членом разложения $\mathrm{Kh}_s(x)$.

Для функции $t_n^s(\mu)$ условие в седловой точке имеет вид

$$(n+s)\,u = n\mu - M,$$

и мы находим

$$t_n^s(\mu) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mu^2-1)^{1/2 s} \left(\frac{n-s}{n}\right)^{n+1/2} \frac{(n+s)^{n+s+1/2}}{(s\mu+M)^s} \frac{M^{-1/2}}{(n\mu-M)^{n+1/2}}. \quad (24)$$

Соотношения (20) и (24) выполняются при всех значениях $\arg \mu$, если величина M определена по непрерывности.

24.18. Второе решение при $-1<\mu<1$. Из соотношения **21.022** (67) находим

$$\mathrm{Hs}_s(nu) = -ie^{-1/2 s\pi i}\mathrm{Kh}_s(nue^{-1/2\pi i}), \quad (1)$$

$$\mathrm{Hi}_s(nu) = ie^{1/2 s\pi i}\mathrm{Kh}_s(nue^{1/2\pi i}), \quad (2)$$

$$2Y_s(nu) = -e^{-1/2 s\pi i}\,\mathrm{Kh}_s(nue^{-1/2\pi i}) - e^{1/2 s\pi i}\mathrm{Kh}_s(nue^{1/2\pi i}). \quad (3)$$

Здесь u — положительное число.

Из соотношений **21.02** (42) и **21.022** (69) мы видим, что коэффициенты разложений функций Y_s и Kh_s равны по абсолютной величине. Но когда $x \to 0$, принимая положительные значения, $\mathrm{Kh}_s(x) \to \infty$, $Y_s(x) \to -\infty$, поэтому удобно взять наше решение в виде $-Y_s(nu)$ вместо $Y_s(nu)$. Мы знаем, что при больших значениях n функция $q_n^s(\mu)$ ведет себя подобно $\mathrm{Kh}_s\left[n\left(\mu^2-1\right)^{1/2}\right]$. Если μ движется по часовой стрелке вокруг точки $+1$, приближаясь к точке, лежащей между -1 и $+1$, имеет место соотношение

$$q_n^s(\mu) \to \frac{2^{n+1}}{\pi} (\mu^2-1)^{1/2 s} \int\limits_{\mu,\,1-i}^{\infty} \frac{(u-\mu)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\pi} e^{-1/2 is\pi} (1-\mu^2)^{1/2 s} \int\limits_{\mu,\,1-i}^{\infty} \frac{(u-\mu)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du = q_n^s(\mu - 0i). \quad (4)$$

Если μ приближается к той же точке против часовой стрелки, то

$$q_n^s(\mu) \to \frac{2^{n+1}}{\pi} e^{1/2 is\pi} (1-\mu^2)^{1/2 s} \int\limits_{\mu,\,1+i}^{\infty} \frac{(u-\mu)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du = q_n^s(\mu + 0i). \quad (5)$$

Мы можем определить второе решение, действительное в интервале $(-1, 1)$ и соответствующее функции $-Y_s\left[n\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\right]$, полагая

$$q_n^s(\mu) = \frac{2^n}{\pi} (1-\mu^2)^{1/2 s} \left[e^{is\pi} \int\limits_{\mu,\,1+i}^{\infty} \frac{(u-\mu)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du + \right.$$

$$\left. + e^{-is\pi} \int\limits_{\mu,\,1-i}^{\infty} \frac{(u-\mu)^{n-s}}{(u^2-1)^{n+1}}\,du \right], \quad (6)$$

$$q_n^s(\mu) = \frac{(n-s)!}{n!} \left(1-\mu^2\right)^{1/2 s} \frac{d^s}{d\mu^s} q_n(\mu). \quad (7)$$

Итак,

$$q_n^s(\mu) = \frac{1}{2} e^{1/2 is\pi} q_n^s(\mu + 0i) + \frac{1}{2} e^{-1/2 is\pi} q_n^s(\mu - 0i). \tag{8}$$

При четных n функция $q_n(\mu)$ нечетная, если точка μ не лежит на разрезе. Из формулы (8) следует, что она остается нечетной функцией и в точках разреза, если принять определение (6). Аналогично при нечетных n функция $q_n(\mu)$ будет четной функцией в точках разреза. Поэтому функция $q_n(\mu)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с найденным в **16.04** решением в виде необрывающегося ряда.

Для определения этого численного множителя заметим, что из **24.17** (12) следует

$$q_n(\mu + 0i) = \frac{1}{\pi}\left[p_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - i\pi p_n(\mu) - f_n(\mu)\right], \tag{9}$$

$$q_n(\mu - 0i) = \frac{1}{\pi}\left[p_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} + i\pi p_n(\mu) - f_n(\mu)\right], \tag{10}$$

и поэтому

$$q_n(\mu) = \frac{1}{\pi}\left[p_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - f_n(\mu)\right]; \tag{11}$$

здесь $f_n(\mu)$ тот же полином, что и в формулах **24.17** (9) и (12). Теперь при четных n нечетное решение **16.04** (5) равно

$$\Theta_2 = \mu - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}\mu^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}\mu^5 - \ldots =$$

$$= \sum \frac{\mu^{2r+1}}{2r+1} + O(1) = \operatorname{Arth}\mu + O(1). \tag{12}$$

При нечетных n четное решение с измененным знаком равно

$$\Theta_2 = -1 + \frac{n(n+1)}{2!}\mu^2 - \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}\mu^4 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\mu}\operatorname{Arth}\mu + O(1). \tag{13}$$

Поэтому в общем случае

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} p_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} + O(1) \tag{14}$$

и

$$q_n(\mu) = \frac{2}{\pi}\Theta_2. \tag{15}$$

Интеграл **24.17** (18) также может быть использован для определения вида функции $q_n(\mu)$ на разрезе. При $\mu \to \mu_0$, где μ_0 — точка, лежащая на разрезе, мы можем деформировать путь от -1 до $+1$, обходя точку μ_0 по маленькому полукругу в нижней полуплоскости. При этом

$$q_n(\mu + 0i) = \frac{1}{\pi} \int_{-1,\ \mu - i\varepsilon}^{1} \frac{p_n(\nu)}{\mu - \nu} d\nu \tag{16}$$

и аналогично

$$q_n(\mu - 0i) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1,\, \mu+i\varepsilon}^{1} \frac{p_n(\nu)}{\mu - \nu}\, d\nu, \tag{17}$$

$$q_n(\mu) = \frac{1}{\pi} P \int\limits_{-1}^{1} \frac{p_n(\nu)}{\mu - \nu}\, d\nu, \tag{18}$$

где P — главное значение.

Мы находим также при малых h

$$\sum h^n q_n(\mu) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - 2\mu h + h^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - 2\mu h + h^2} + \mu - h}{\sqrt{1 - 2\mu h + h^2} - \mu + h}. \tag{19}$$

Отсюда, полагая

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ h = a/r,\ z = \mu r,\ R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}, \tag{20}$$

находим

$$\frac{1}{r} \sum \left(\frac{a}{r}\right)^n q_n(\mu) = \frac{1}{\pi R} \ln \frac{R + z - a}{R - z + a}, \tag{21}$$

и, значит,

$$r^{-n-1} q_n(\mu) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{1}{R} \ln \frac{R + z - a}{R - z + a} \right), \tag{22}$$

$$r^{-n-1} q_n(\mu) = \frac{(-1)^n}{\pi n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{1}{r} \ln \frac{r + z}{r - z} \right). \tag{23}$$

Сравнивая члены, содержащие $\ln \dfrac{r+z}{r-z}$, и учитывая соотношение **24.04** (22), находим

$$r^{-n-1} q_n^s(\mu)\, e^{is\lambda} = \frac{(-1)^n}{\pi n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^s \frac{\partial^{n-s}}{\partial z^{n-s}} \left(\frac{1}{r} \ln \frac{r+z}{r-z} \right). \tag{24}$$

24.19. Асимптотика функций $p_n^s(\mu)$, когда оба параметра n и s велики *). Используя соотношение **24.162** (29), методом наискорейшего спуска находим при $0 < \mu < 1$

$$p_n^s(\mu) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin^s\theta \left(\frac{n-s}{n} \right)^{n+1/2} \frac{(n+s)^{n+s+1/2} M^{-1/2}}{(M + \mu s)^s\, (n\mu - M)^{n+1/2}}, \tag{1}$$

где $M = \sqrt{s^2 - n^2 \sin^2\theta} > 0$.

Если $M^2 < 0$, положим

$$N = \sqrt{n^2 \sin^2\theta - s^2} > 0, \quad \arg(s\mu + iN) = \alpha,$$
$$\arg(n\mu - iN) = -\beta.$$

Тогда

$$p_n^s(\mu) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{(n-s)^{1/2 n - 1/2 s + 1/4}\, (n+s)^{1/2 n + 1/2 s + 1/4}}{n^{n+1/2}} \times$$
$$\times N^{-1/2} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \beta - s\alpha + \frac{1}{4} \pi \right]. \tag{2}$$

---

*) Другие асимптотические приближения приведены у Ватсона [8].

24.20. Другие решения уравнения Лапласа в сферических полярных координатах. В наиболее простом случае $n = s = 0$ решение уравнения Лежандра имеет вид

$$\Theta = A + B \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} = A + B \ln \frac{r+z}{r-z}.$$

Член A представляет функцию p_0, которая сводится к постоянной. Второй член имеет точки ветвления при $\mu = \pm 1$ и пропорционален $q_0(\mu)$.

Мы уже встречали в неявном виде другие гармоники нулевой степени. Так, $\varphi = \lambda$ является очевидным решением уравнения Лапласа в сферических полярных координатах в области, не являющейся полной сферой, поскольку решение должно быть однозначной функцией координат x, y, z. Другие решения будут вида $\ln \bar{\omega}$, и поскольку функции $z + ix$ и $z + iy$ удовлетворяют уравнению Лапласа, мы получим гармоники нулевой степени, взяв действительную и мнимую части от их логарифмов, а именно

$$\ln (z^2 + x^2)^{1/2} = \ln r + \frac{1}{2} \ln (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \lambda),$$
$$\ln (z^2 + y^2)^{1/2} = \ln r + \frac{1}{2} \ln (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \lambda), \tag{1}$$

$$\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \theta \cos \lambda), \quad \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \theta \sin \lambda). \tag{2}$$

Действительно, для случая, когда решение уравнения Лапласа зависит только от θ и λ, это уравнение принимает вид

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} = 0, \tag{3}$$

и ему удовлетворяют действительная и мнимая части от некоторой функции, зависящей от $\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + i\lambda$, или, что то же, от $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta e^{i\lambda}$. Этот класс решений не включает в себя решения, содержащие $\ln r$.

Таким образом, разнообразие решений уравнения Лапласа в сферических полярных координатах бесконечно. Однако, кроме решения, сводящегося к постоянной, эти новые решения или обращаются в бесконечность в начале координат, как $\ln r$, или бесконечны при некоторых значениях θ и λ, или же не возвращаются к своему исходному значению, когда θ или λ непрерывно возрастает на 2π. Дифференцируя по x, y, z и умножая на соответствующую степень r, мы можем построить гармоники разных степеней, подобно тому как мы строили функции первого рода из производных от $1/r$. Но ни одно из этих решений не удовлетворяет нашему основному требованию разложимости на сфере в тройной ряд Тейлора по x, y, z, и поэтому их исключают из физических соображений, когда требуется получить решение, справедливое внутри или вне полной сферы. Если потребовать, чтобы решение было конечным и периодическим по λ, то класс допустимых решений сведется к решениям уравнения для присоединенных функций Лежандра.

Эти условия возникают в задачах, связанных со сфероидами. Для вытянутого сфероида из требования, чтобы на поверхности постоянного ξ функция φ была конечной и непрерывной, следует разложимость φ в ряд по $p_n^s(\cos \eta)(\cos s\lambda, \sin s\lambda)$ с коэффициентами, зависящими от ξ. Но тогда из условия, что члены этого ряда удовлетворяют уравнению Лапласа, следует, что множители, зависящие от ξ, должны быть вида $p_n^s(\operatorname{ch} \xi)$ и $q_n^s(\operatorname{ch} \xi)$. Изменения для случая сплюснутого сфероида очевидны. Таким образом, физические требования показывают, что нами были получены именно те решения, которые нужны на деле. Практически $\operatorname{ch} \xi$ принимает действительные

и бо́льшие 1 значения на поверхности вытянутого сфероида и во всех внешних точках, поэтому особенности функций q_n^s лежат вне рассматриваемой области и решения q_n^s допустимы. Для сплюснутого сфероида соответствующими функциями будут $p_n^s(i\,\mathrm{sh}\,\xi)$, $q_n^s(i\,\mathrm{sh}\,\xi)$ при действительных значениях ξ. Величина $i\,\mathrm{sh}\,\xi$ не принимает значений ± 1, так что решение q_n^s снова является допустимым во внешних задачах. (Мы видели, что эти решения по различным соображениям не допустимы в случае внутренних задач.)

24.21. Разложение $e^{-i\varkappa R}/R$. Во многих приложениях волновой механики необходимо получить разложение этой функции, аналогичное разложению $1/R$ в теории потенциала. Здесь $R^2=(x_i-x_i')^2$, и разложение ведется по функциям $p_n(\cos\vartheta)$, умноженным на произведение двух функций, одна из которых зависит от r, а другая от r'. Разложение строится следующим образом. Функция $e^{-i\varkappa R}/R$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi=\varkappa^2\psi, \tag{1}$$

и поэтому при $r<r'$ может быть разложена в ряд вида

$$\frac{e^{-i\varkappa R}}{R}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(r')\,\frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{r^{1/2}}\,p_n(\cos\vartheta). \tag{2}$$

Положим

$$\cos\vartheta=\mu, \tag{3}$$

$$R^2=r^2+r'^2-2rr'\mu. \tag{4}$$

При постоянных r и r'

$$R\,dR=-rr'\,d\mu, \tag{5}$$

$$-\frac{\partial}{\varkappa R\,\partial(\varkappa R)}=\frac{\partial}{\varkappa^2 rr'\,\partial\mu}. \tag{6}$$

Поэтому

$$\left(-\frac{\partial}{\varkappa R\partial(\varkappa R)}\right)^m\frac{e^{-i\varkappa R}}{R}=\sum A_n(r')\,\frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{r^{1/2}}\left(\frac{1}{\varkappa^2 rr'}\right)^m\frac{d^m}{d\mu^m}\,p_n(\mu). \tag{7}$$

Но $d^m p_n(\mu)/d\mu^m=0$ при $m>n$. Если $m<n$, то

$$\lim_{r\to 0}\frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{r^{m+1/2}}=0, \tag{8}$$

и, следовательно, в пределе при $r\to 0$ сумма в правой части равенства (7) сведется к пределу члена, соответствующего $m=n$, а именно

$$\lim_{r\to 0}A_m(r')\,\frac{J_{m+1/2}(\varkappa r)}{r^{1/2}(\varkappa^2 rr')^m}\,\frac{(2m)!}{2^m m!}=\frac{A_m(r')}{(\varkappa r')^m}\,\frac{\varkappa^{1/2}}{2^{m+1/2}(m+1/2)!}\,\frac{(2m)!}{2^m m!}. \tag{9}$$

Но

$$(2m)!=2^{2m}m!\left(m-\frac{1}{2}\right)!/\sqrt{\pi}, \tag{10}$$

и выражение (9) приводится к виду

$$\frac{A_m(r')}{(\varkappa r')^m}\,\frac{\varkappa^{1/2}}{(m+1/2)\sqrt{2\pi}}. \tag{11}$$

Поэтому, полагая в левой части равенства (7) $r=0$, мы получаем

$$\left(-\frac{\partial}{\varkappa r'\partial(\varkappa r')}\right)^m \frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'} = \frac{A_m(r')}{(\varkappa r')^m}\,\frac{\varkappa^{1/2}}{(m+1/2)\sqrt{2\pi}}.$$

Но

$$\mathrm{Hi}_{m+1/2}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{m+1/2}\left(-\frac{\partial}{x\,\partial x}\right)^m \frac{e^{-ix}}{x},$$

откуда находим

$$A_m(r') = -\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i\,\frac{\mathrm{Hi}_{m+1/2}(\varkappa r')}{\sqrt{r'}}.$$

Таким образом, при $r<r'$

$$\frac{e^{-i\varkappa R}}{R} = -\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{Hi}_{n+1/2}(\varkappa r')}{\sqrt{r'}}\,\frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}\,p_n(\cos\vartheta). \tag{12}$$

При $\varkappa=0$ это совпадает с равенством **24.05** (4). При $r>r'$ мы должны поменять местами r и r'.

24.22. Классификация мультипольного излучения. Известное решение уравнения распространения электромагнитных волн соответствует излучению осциллирующего диполя. Однако для физических приложений важны и другие решения, и мы рассмотрим здесь, каким образом их можно классифицировать.

Мы видели, что $2n+1$ величин K^s_{n-1} ($s=-n,\ -n+1,\ \ldots,\ n$) преобразуются подобно величинам $x_1^{n-s}x_2^{n+s}$, когда x_1, x_2 подвергаются унитарному преобразованию с детерминантом, равным 1. Мы будем говорить, что такая система величин преобразуется по R_n-представлению порядка n группы вещественных вращений. Три величины $ib-a=x_1^2$, $c=x_1x_2$, $ib+a=x_2^2$, где a, b, c — компоненты трехмерного нуль-вектора, преобразуются по представлению R_1.

Обозначим, как это принято в электродинамике, электромагнитный вектор-потенциал через $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$ и скалярный потенциал через φ. В пустом пространстве эти величины удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0,\\ \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Удобно выбрать в качестве компонент вектора **A** не A_1, A_2, A_3, а величины $(iA_2 - A_1,\ A_3,\ iA_2 + A_1)$, преобразующиеся по представлению R_1. Обозначим их через A_μ ($\mu = -1, 0, 1$). Они удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 A_\mu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Эти уравнения, согласно **24.04** (22), допускают решения вида

$$u^{s'}_{n'} = e^{i\varkappa ct} f_{n'}(\varkappa r)\, p^{s'}_{n'} e^{is'\lambda} = \frac{(-1)^{n'}}{n'!}\, e^{i\varkappa ct} f_{n'}(\varkappa r)\, r^{n'+1} K^{s'}_{-n'-1}, \tag{3}$$

где $(\varkappa r)^{1/2} f_{n'}(\varkappa r)$ — функция Бесселя порядка $n' + 1/2$ от аргумента $\varkappa r$. Рассмотрим случай, когда функциями Бесселя являются функции Hi. Тогда

$$\mathrm{Hi}_{n'+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (-1)^{n'} x^{n'+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^{n'} \left(\frac{ie^{-ix}}{x}\right). \tag{4}$$

Пусть c^s_n — система величин, преобразующихся по представлению R_n. Можно показать [9], что в том и только в том случае, когда n' принимает одно из значений n, $n \pm 1$, могут быть построены три линейные комбинации величин $c^s_n u^{s'}_{n'}$, преобразующиеся по представлению R_1. Запишем эти комбинации в виде

$$W^S_1 = \sum_{s+s'=S} \left(\begin{matrix} n & n' \\ s & s' \end{matrix}\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ S \end{matrix}\right) c^s_n u^{s'}_{n'} \qquad (S = -1, 0, 1), \tag{5}$$

причем коэффициенты $\left(\begin{matrix} n & n' \\ s & s' \end{matrix}\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ S \end{matrix}\right)$ могут быть определены.

Три компоненты A_μ преобразуются, как W^S_1. Мы должны рассмотреть три случая. Чтобы их отличить друг от друга, будем вместо c писать h, a и b:

1) $n' = n$. $$A_\mu = \sum_s \left(\begin{matrix} n & n \\ s & \mu - s \end{matrix}\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ \mu \end{matrix}\right) h^s_n u^{\mu - s}_n. \tag{6}$$

2) $n' = n + 1$. $$A_\mu = \sum_s \left(\begin{matrix} n & n+1 \\ s & \mu - s \end{matrix}\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ \mu \end{matrix}\right) a^s_n u^{\mu - s}_{n+1}. \tag{7}$$

2) $n' = n - 1$. $$A_\mu = \sum_s \left(\begin{matrix} n & n-1 \\ s & \mu - s \end{matrix}\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ \mu \end{matrix}\right) b^s_n u^{\mu - s}_{n-1}. \tag{8}$$

При инверсии относительно начала координат решение h^s_n преобразуется иначе, чем остальные два решения. Это преобразование изменяет знак у всех координат на обратный и означает переход от правой системы координат к левой. Некоторые векторы, как, например, смещение, при таком

преобразовании меняют знак своих компонент и называются *полярными* векторами. Другие векторы, такие, как векторное произведение полярных векторов, не изменяются и называются *аксиальными* векторами. Мы можем назвать n-вектором совокупность c_n^s и при этом будем иметь два типа таких векторов. Те, что при отражении умножаются на $(-1)^n$, назовем полярными n-векторами, а те, что умножаются на $(-1)^{n+1}$, назовем аксиальными n-векторами. A_μ и $u_n^{\mu-s}$ будут полярными n-векторами, и, следовательно, h_n^s будет аксиальным n-вектором, а n-векторы a_n^s и b_n^s — полярными.

Удобно определить (6) как вектор-потенциал электромагнитного поля от магнитного 2^n-поля, а (7) или (8) как вектор-потенциал электромагнитного поля от электрического 2^n-поля.

Скалярный потенциал φ удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

и является истинным скаляром, так как он не меняет знака при отражении относительно начала. Он имеет вид

$$\sum \binom{n \quad n \mid 0}{s \quad -s \mid 0} c_n^s u_n^{-s}, \tag{10}$$

где c_n^s — компоненты полярного n-вектора. Отсюда следует, что скалярный потенциал, соответствующий (6), должен быть нулевым вектором, в то время как h_n^s — аксиальный n-вектор, а c_n^s для случаев (7) и (8) связан соответственно с a_n^s и b_n^s.

Из соотношений

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

можно вывести свойства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ для трех случаев. Эти свойства приведены в таблице, из которой видно, какая линейная комбинация введенных величин соответствует потенциалам и полям.

	$\mathbf{A}$	φ	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$
Электрический 2^n-поль	$a_n^s u_{n+1}^{s'}$	$a_n^s u_n^{s'}$	$a_n^s \diagup u_{n+1}^{s'}$, $\diagdown u_{n-1}^{s'}$	$a_n^s u_n^{s'}$
	$b_n^s u_{n-1}^{s'}$	$b_n^s u_n^{s'}$	$b_n^s \diagup u_{n+1}^{s'}$, $\diagdown u_{n-1}^{s'}$	$b_n^s u_n^{s'}$
Магнитный 2^n-поль	$h_n^s u_n^{s'}$	0	$h_n^s u_n^{s'}$	$h_n^s \diagup u_{n+1}^{s'}$, $\diagdown u_{n-1}^{s'}$

Необходимо заметить, что при любом виде выражения для потенциала электрического 2^n-поля вид **E** и **H** остается одним и тем же, как и должно быть. Сравнивая поля для магнитного и электрического мультиполей одного порядка, мы видим, что в них роли величин **E** и **H** меняются.

Рассмотрим несколько простых случаев.

Электрический диполь; $n=1$, $n'=0$:

$$A_\mu = b_1^\mu u_0^0 = b_1^\mu e^{i\varkappa ct}\left(\frac{2}{\varkappa\pi}\right)^{1/2}\frac{ie^{-i\varkappa r}}{r} = i\varkappa d_1^\mu\frac{e^{i\varkappa(ct-r)}}{r}.$$

В частном случае $d_1^0=1$, $d_1^{\pm1}=0$

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{i\varkappa(ct-r)}}{r}.$$

При $\varkappa=0$ получается скалярный потенциал диполя единичной напряженности с осью, направленной вдоль оси z.

Электрический квадруполь; $n=2$, $n'=1$.

Предположим, что $b_2^s=0$, если $s\neq0$. Тогда получим решение

$$A_x = \frac{Cx}{r^2}\left(1-\frac{i}{\varkappa r}\right)e^{i\varkappa(ct-r)},$$

$$A_y = \frac{Cy}{r^2}\left(1-\frac{i}{\varkappa r}\right)e^{i\varkappa(ct-r)},$$

$$A_z = -\frac{2Cz}{r^2}\left(1-\frac{i}{\varkappa r}\right)e^{i\varkappa(ct-r)},$$

$$\varphi = -2C\frac{p_2(\cos\theta)}{r}\left(1-\frac{3i}{\varkappa r}-\frac{3}{\varkappa^2r^2}\right)e^{i\varkappa(ct-r)}.$$

Магнитный диполь; $n=1$, $n'=1$.

Предположим, что $h_1^0\neq0$, $h_1^{\pm1}=0$. Тогда получим решение

$$A_x = \frac{Cy}{r^2}\left(1-\frac{i}{\varkappa r}\right)e^{i\varkappa(ct-r)},$$

$$A_y = -\frac{Cx}{r^2}\left(1-\frac{i}{\varkappa r}\right)e^{i\varkappa(ct-r)},$$

$$A_z = \varphi = 0.$$

Более подробно см. [10 – 14].

24.23. Мультипольное разложение скалярного и векторного потенциалов. В теории электромагнитного излучения бывает удобно иметь такое разложение, в котором собраны вместе члены, содержащие одинаковую степень $\varkappa r'$. Такое разложение можно получить из **24.21** (12), а можно непосредственно следующим образом. Предположим, что имеются конечные распреде-

ления плотности заряда $\rho(x_i')$ и плотности тока $\mathbf{j}(x_i')$, содержащие множитель $e^{i\varkappa ct}$ и удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\frac{\partial j_l}{\partial x_l'} + \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

или

$$\frac{\partial j_l}{\partial x_l'} + i\varkappa\rho = 0. \tag{2}$$

Тогда скалярный и векторный потенциалы (φ, $\mathbf{A}$) в точке $P(x_i)$ имеют вид

$$\varphi = \int\int\int \rho \frac{e^{-i\varkappa R}}{R}\, dx_1' dx_2' dx_3',$$

$$A_i = \int\int\int j_i \frac{e^{-i\varkappa R}}{R}\, dx_1' dx_2' dx_3'. \tag{3}$$

Здесь ρ и j_l считаются функциями точки $Q(x_i')$. Функции φ и A_i удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Действительно, пусть f — некоторая функция от x_i, x_i'. Обозначим $dx_1' dx_2' dx_3' = d\tau$, тогда

$$i\varkappa \int\int\int \rho f\, d\tau = -\int\int\int \frac{\partial j_l}{\partial x_l'} f\, d\tau =$$

$$= -\int\int\int \frac{\partial}{\partial x_l'}(f j_l)\, d\tau + \int\int\int j_l \frac{\partial f}{\partial x_l'}\, d\tau. \tag{5}$$

Мы можем найти такую граничную поверхность, чтобы в каждой ее точке $j_l = 0$; тогда на основании леммы Грина первый интеграл обратится в нуль. Если же f зависит только от разности $x_i - x_l'$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = -\frac{\partial f}{\partial x_l'}, \tag{6}$$

и если, в частности,

$$f(x_i, x_l') = \frac{e^{-i\varkappa R}}{R}, \tag{7}$$

то

$$i\varkappa \int\int\int \rho \frac{e^{-i\varkappa R}}{R}\, d\tau + \int\int\int j_l \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{e^{-i\varkappa R}}{R}\right) d\tau = 0, \tag{8}$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A_l}{\partial x_l} = 0. \tag{9}$$

Положим в (5) последовательно $f=1$, x'_k, $x'_k x'_m$; тогда для $\varkappa \neq 0$

$$\int\int\int \rho\, d\tau = 0, \tag{10}$$

$$i\varkappa \int\int\int \rho x'_k\, d\tau = \int\int\int j_i \delta_{lk}\, d\tau = \int\int\int j_k d\tau, \tag{11}$$

$$i\varkappa \int\int\int \rho x'_k x'_m\, d\tau = \int\int\int j_i \left(x'_m \delta_{lk} + x'_k \delta_{im}\right) d\tau = \\ = \int\int\int \left(j_k x'_m + j_m x'_k\right) d\tau. \tag{12}$$

Теперь разложение φ в ряд Тейлора для $r' < r$ может быть записано в виде

$$\varphi = \int\int\int \rho \exp\left(-x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\int\int \rho x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x'_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)(\ldots)(n\text{-кратный оператор}) \times \\ \times \left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau = 0 - \int\int\int \rho x'_i \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int\int\int \rho x'_i x'_k \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau - \ldots,$$

$$\varphi e^{i\varkappa r} = \varkappa \int\int\int \rho \frac{x'_i x_i}{r^2}\left(i + \frac{1}{\varkappa r}\right) d\tau + \\ + \frac{1}{2}\varkappa^2 \int\int\int \rho x'_i x'_k \left[-\frac{x_i x_k}{r^3} + \frac{1}{\varkappa r^2}\left(i + \frac{1}{\varkappa r}\right)\left(\frac{3x_i x_k}{r^2} - \delta_{ik}\right)\right] d\tau + \ldots. \tag{13}$$

Обозначим

$$P_i = \int\int\int \rho x'_i\, d\tau, \\ P_{ik} = \int\int\int \rho \left(x'_i x'_k - \frac{1}{3}\delta_{ik} x'_j x'_j\right) d\tau, \tag{14} \\ P = \int\int \rho x'_j x'_j\, d\tau.$$

Вектор P_i можно выразить в виде линейной комбинации трех b_1^s; $P_{ii} = 0$, а тензор P_{ik} имеет 5 независимых компонент, которые можно выразить в виде линейной комбинации пяти b_2^s (P — скаляр). Тогда

$$\varphi = e^{-i\varkappa r}\left\{\varkappa P_i \frac{x_l}{r^2}\left(i + \frac{1}{\varkappa r}\right) + \right. \\ + \frac{1}{2}\varkappa^2 P_{ik}\left[-\frac{x_i x_k}{r^3} + \frac{1}{\varkappa r^2}\left(i + \frac{1}{\varkappa r}\right)\left(\frac{3x_i x_k}{r^2} - \delta_{ik}\right) - \right. \\ \left.\left. - \frac{1}{6}\frac{\varkappa^2 P}{r} + \ldots\right]\right\}. \tag{15}$$

Член, содержащий P_i, равен скалярному потенциалу электрического диполя, член, содержащий P_{ik}, равен потенциалу электрического квадруполя, а член, содержащий P, равен потенциалу точечного заряда, равного полному заряду системы. Соответствующее разложение для A_i на основании (11) и (14) имеет вид

$$A_i = \int\int\int j_i \exp\left(-x'_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau =$$
$$= \int\int\int j_i \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\, d\tau - \int\int\int j_i \frac{x_k x'_k}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau =$$
$$= i\varkappa \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} P_i - \frac{1}{2}\int\int\int (j_i x'_k + j_k x'_i)\frac{x_k}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau -$$
$$- \frac{1}{2}\int\int\int (j_i x'_k - j_k x'_i)\frac{x_k}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) d\tau. \qquad (17)$$

Но по (12) второй член равен

$$-\frac{1}{2}\frac{i\varkappa}{r} x_k P_{ik} \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) - \frac{i\varkappa}{6} P \frac{x_i}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right). \qquad (18)$$

Эти два члена равны соответственно векторному потенциалу электрического квадруполя и точечного заряда, подобно членам в разложении скалярного потенциала. Поле (**E**, **H**) для точечного заряда обращается в нуль. (Условия, сформулированные после (5), исключают существование осциллирующего единичного заряда.)

В последнем члене (17) обозначим

$$M_{ik} = \frac{1}{2}\int\int\int (x'_i j_k - x'_k j_i)\, d\tau. \qquad (19)$$

Это антисимметричный тензор, который может быть связан с аксиальным вектором h_1^s. Член, содержащий его, является вектор-потенциалом магнитного диполя. С точностью до членов, содержащих $(\varkappa r')^2$,

$$A_i = e^{-i\varkappa r}\left[i\varkappa \frac{P_i}{r} - \frac{1}{2}\varkappa^2 P_{ik}\frac{x_k}{r^2}\left(1 - \frac{i}{\varkappa r}\right) - \right.$$
$$\left. - i\varkappa M_{ik}\frac{x_k}{r^2}\left(1 - \frac{i}{\varkappa r}\right) - \frac{1}{6}\varkappa^2 P \frac{x_i}{r^2}\left(1 - \frac{i}{\varkappa r}\right)\right]. \qquad (20)$$

На основании **24.21** (12) можно записать A_i в виде

$$\int\int\int j_i \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=-n}^{n} C_{n,s} \frac{\mathrm{Hi}_{n+1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} \frac{J_{n+1/2}(\varkappa r')}{\sqrt{r'}} \times$$
$$\times p_n^s(\cos\theta')\, p_n^s(\cos\theta)\, e^{is(\lambda-\lambda')}\, d\tau, \qquad (21)$$

где $C_{n,\,s}$ — постоянные. Можно показать, что член

$$\int\int\int j_i \frac{J_{n+1/2}(\varkappa r')}{\sqrt{r'}} p_n^s(\cos\theta') e^{-is\lambda'} d\tau \qquad (22)$$

можно выразить в виде линейных комбинаций величин $c_{n\pm1}^{s'}$, $c_n^{s'}$. Последовательности линейных комбинаций произведений этих величин на $p_n^s(\cos\theta)$ дают полярный 1-вектор, причем его можно образовать следующим образом:

$c_{n+1}^{s'} p_n^s(\cos\theta)\, e^{is\lambda}$	$c_{n+1}^{s'}$	полярный	электрический	2^{n+1}-поль
$c_{n-1}^{s'} p_n^s(\cos\theta)\, e^{is\lambda}$	$c_{n-1}^{s'}$	полярный	электрический	2^{n-1}-поль
$c_n^{s'} p_n^s(\cos\theta)\, e^{is\lambda}$	$c_n^{s'}$	аксиальный	магнитный	2^n-поль

Члены в φ и A_l, содержащие

$$\frac{\partial^n}{\partial x_l\, \partial x_k \ldots} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r},$$

дают смешанное мультипольное излучение, как мы уже это видели в случае

$$(\partial^2/\partial x_l\, \partial x_k)(e^{-i\varkappa r}/r).$$

ПРИМЕРЫ

1. Электрический диполь с моментом M находится на расстоянии a от центра сферы, имеющей диэлектрическую постоянную K и радиус b $(b < a)$. Центр сферы находится на оси диполя. Доказать, что сила притяжения сферы к диполю равна

$$\frac{K-1}{a^4} M^2 \sum_0^\infty \frac{n(n+1)^2(n+2)}{Kn+n+1} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}.$$

(М. Т., 1939.)

2. Определить потенциал силы тяжести тонкого гравитирующего сферического слоя, поверхностная плотность которого имеет осевую симметрию.

Однородное, почти сферическое тело плотности ρ ограничено поверхностью $r = a(1 + \varepsilon P_2)$. Оно окружено жидкостью объемом $\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)$ с однородной плотностью σ. Показать, что если тело целиком покрыто жидкостью, то свободная поверхность жидкости есть $r = b(1 + \eta P_2)$, где

$$\eta = \frac{3(\rho - \sigma) a^5 \varepsilon}{b^2 [5(\rho - \sigma) a^3 + 2\sigma b^3]}.$$

(М. Т., 1936.)

3. Почти сферический проводник ограничен поверхностью

$$r = a[1 + \varepsilon P_n(\cos\theta)] \qquad (n > 1),$$

где ε мало. Он изолирован и помещен в однородное поле F, направление которого совпадает с осью проводника. Найти возмущение поля, вызванное

присутствием проводника, и показать, что поверхностная плотность наведенного заряда на проводнике равна

$$\frac{3F}{4\pi}\cos\theta + \frac{3F}{4\pi}\frac{n}{2n+1}\varepsilon\,[(n-2)\,P_{n-1}(\cos\theta) + (n+1)\,P_{n+1}(\cos\theta)].$$

(M. T., 1939.)

4. Маленький магнит помещен в центр сферической оболочки из железа с радиусами a и b и с магнитной проницаемостью μ. Показать, что поле вне оболочки благодаря присутствию железа уменьшается в отношении

$$\left[1 + \frac{2}{9}\frac{(\mu-1)^2}{\mu}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)\right]^{-1}.$$

5. Конденсатор образован двумя проводящими сферами радиусами a, b $(a < b)$ с центрами в A, B. Длина AB равна c, и величиной $(c/a)^2$ можно пренебречь. Определить емкость конденсатора, если внешняя сфера заземлена, и показать, что если Q — заряд на внутренней сфере, то поверхностная плотность в точке P этой сферы равна

$$\frac{Q}{4\pi a^2}\left[1 - \frac{3a^2 c\cos PAB}{b^3 - a^3}\right]. \qquad \text{(Prelim., 1936.)}$$

6. Электрический заряд e равномерно распределен на отрезке BC прямой OBC. P — произвольная точка, причем $OP < OB$. Положив

$$OP = r,\ OB = b,\ OC = c,\ \cos BOP = \mu,$$

получить выражение потенциала в точке P через r, P_0, P_1, ... Заземленная проводящая сфера радиуса $a\,(< b)$ имеет центр в O. Получить выражение для потенциала в точке P области $a \leqslant r < b$ и показать, что заряд, наведенный на сферу, равен

$$-ea\frac{\ln c - \ln b}{c - b}.$$

7. Если K_n — объемная гармоника степени n, показать, что

$$\nabla^2 (r^m K_n) = m\,(m + 2n + 1)\,r^{m-2} K_n.$$

Если U — однородный полином от x, y, z степени $2n$, показать, что

$$\int\int U\,dS = \frac{4\pi a^{2n+2}}{(2n+1)!}(\nabla^2)^n U.$$

Интеграл берется по сфере $r = a$.

8. Пользуясь определением интеграла, доказать, что

$$(n+1)\,q_{n+1}(\mu) - (2n+1)\,\mu q_n(\mu) + n q_{n-1}(\mu) = 0.$$

Интегрированием получить $q_0(\mu)$, $q_1(\mu)$, затем доказать **24.17** (9) и **24.17** (18).

9. Доказать непосредственно, что интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{p_n(\nu)\,d\nu}{\mu - \nu}$ является решением уравнения Лапласа, и, следовательно, он является множителем у $q_n(\mu)$.

10. Доказать, что если μ не действительное и заключено между -1 и 1, то

$$q_n(\mu) = \frac{1}{2^n \pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-\nu^2)^n}{(\mu - \nu)^{n+1}}\,d\nu.$$

11. Доказать, что если μ не действительное и находится в интервале -1, 1, а ν также лежит в этом интервале, то

$$\frac{1}{\mu-\nu}=\frac{1}{2}\pi\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,p_n(\nu)\,q_n(\mu).$$

(Гейне)

12. Выразить $\sin^3\theta\,(1+\cos\theta)\sin 3\lambda$ в виде суммы тессеральных гармоник.

13. Тороидальные координаты σ, ψ, λ связаны с цилиндрическими координатами $\bar{\omega}$, z, λ соотношением

$$z+i\bar{\omega}=a\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\psi+i\sigma).$$

Доказать, что

$$ds^2=\frac{a^2\,(d\sigma^2+d\psi^2+\operatorname{sh}^2\sigma\,d\lambda^2)}{(\operatorname{ch}\sigma-\cos\psi)^2},$$

и на основании этого выразить уравнение Лапласа через σ, ψ, λ.

Показать, что существует простая тороидальная гармоника вида

$$(\operatorname{ch}\sigma-\cos\psi)^{1/2}\cos n\psi\cos m\lambda f(\operatorname{ch}\sigma),$$

и определить f.

(I. C., 1937.)

14. Доказать, что

$$e^{-i\varkappa z}=\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,(-i)^n\frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{(\varkappa r)^{1/2}}\,p_n(\mu).$$

15. Если $u=\frac{1}{2}(x+iy)$, $v=\frac{1}{2}(-x+iy)$, $a+b+c=n$, $a-b=s$, где a, b, c — целые положительные числа или нули, показать, что

$$\sum_{c}\frac{u^a v^b z^c}{a!\,b!\,c!}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа.

Если $n-s$ — четное число, показать, что все c должны быть четными и что **(24.03)** (5) при

$$g(x,y)=\frac{u^{1/2(n+s)}v^{1/2(n-s)}}{\left[\frac{1}{2}(n+s)\right]!\left[\frac{1}{2}(n-s)\right]!},\quad h(x,y)=0$$

имеют заданный вид. Найти соответствующее решение, когда $n-s$ — нечетное число.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Darwin C. G.*, Proc. Roy. Soc., **A118**, 668 (1928).
2. *Condon E. J., Shortley G. H.*, The Theory of Atomic Spectra CUP, 1935, p. 52. (Русский перевод: *Кондон Е., Шортли Г.*, Теория атомных спектров, М., ИЛ, 1949.)
3. *Jeans J. H.*, Electricity and Magnetism, 1908, p. 215.

4. *Courant R., Hilbert D.*, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 1, 1924, S. 421—422. (Русский перевод: *Курант Р., Гильберт Д.*, Методы математической физики, т. I, М. — Л., Гостехиздат, 1951.)
5. *Adams J. C.*, Collected Scientific, Papers, **2**, 243—296; 343—400.
6. *Gaunt J. A.*, Phil. Trans., **A228**, 192—196 (1929).
7. *Jeffreys B.*, Geophys. J., **10**, 141—146 (1965).
8. *Watson G. H.*, Mess. Math, **47**, 151—160 (1917); Cambr. Phil. Soc. Mems., **22**, 277—308 (1918).
9. *van der Waerden B. L.*, Die Gruppentheoretishe Methode in der Quantenmechanik, § 18. (Русский перевод: *ван дер Варден Б. Л.*, Метод теории групп в квантовой механике, ГНТИУ, 1938.)
10. *Brinkman H. C.*, Diss. Utrecht, 1—89 (1932).
11. *Heitler W.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **32**, 112—126 (1936).
12. *Kramers H. A.*, Physica, **10**, 261—272 (1943).
13. *Берестецкий В. Б.*, J. Phys. USSR, **11**, 85—90 (1947).
14. *Jeffreys B.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **48**, 470—481 (1952).

Глава 25

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Множьтесь, множьтесь,
труд и муки.

Шекспир, „Макбет"

25.01. Определение: примеры. Эллиптические функции характеризуются следующими свойствами: 1) они являются однозначными аналитическими функциями во всей плоскости, за исключением изолированных точек, где они имеют полюсы; 2) существуют два числа ω и ω', отношение которых не является действительным, такие, что для всех значений z

$$f(z+\omega)=f(z+\omega')=f(z)$$

и поэтому

$$f(z+m\omega+n\omega')=f(z)$$

для всех положительных и отрицательных целых значений m и n.

Название „эллиптические функции" возникло впервые из-за того, что эти функции связаны с интегралом, который появляется при определении периметра эллипса. Они имеют многочисленные приложения в физике. Для них существует обширная, чисто математическая теория, по-видимому, более обширная, чем для каких-либо других трансцендентных функций, которая умещается в основном в трехтомных работах *). В противоположность большинству рассмотренных в этой книге функций они не являются решениями линейного дифференциального уравнения; они удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка. В то время как большинство функций математической физики так или иначе появляются из уравнений, описывающих распространение волн или тепла, эллиптические функции возникают во всех видах задач и обычно неожиданно.

Естественно, они появляются в задачах о потенциале, связанных с внутренностью прямоугольника, где потенциал на границе поддерживается равным нулю, а внутри могут находиться заряды. Граничные условия будут удовлетворены, если путем

*) Образцами таких работ являются работы Тэннери, Молка и Эннепери и Халфена. В недавней работе Невиля (в одном томе) достигнута большая симметрия в изложении.

последовательного отражения через стороны расположить подходящим образом двойной ряд воображаемых зарядов. Суммарный сложный потенциал, как легко видеть, будет обладать свойствами, присущими эллиптическим функциям. Важный круг задач, относящихся к линиям равноотстоящих вихрей между жесткими стенками, был решен таким путем Розенхейдом [1]. Он имеет приложения к сопротивлению тел в аэродинамических трубах.

25.02. Периодичность решений одного типа дифференциального уравнения: маятник и центральные орбиты. Обычно появление периодичности связано с рассмотрением дифференциального уравнения вида

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = f(x), \tag{1}$$

которое следует рассматривать как первый интеграл уравнения второго порядка $\ddot{x} = \frac{1}{2} f'(x)$, где $\dot{x}$ действительно и отлично от нуля при $x = x_0$, а $f(x)$ имеет простые нули при $x = a$ и $x = b$, причем $a < x_0 < b$. Решение этого уравнения есть

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}. \tag{2}$$

Если $\dot{x}$ положительно при $t = t_0$, то оно остается положительным, пока x не достигнет b. Формально возможным решением должно быть, следовательно, постоянное $x = b$, однако тогда мы должны иметь $\dot{x} = 0$ и $f(x) = f(b) = 0$*). Однако это решение противоречит условию $\ddot{x} = \frac{1}{2} f'(b)$, в котором $f'(b)$ не равно нулю, так как по предположению b есть простой нуль $f(x)$. (Эквивалентным условием в случае, когда допускаются комплексные значения, является аналитичность функции x относительно t.) Следовательно, $\dot{x}$ должно переменить знак, и x будет монотонно уменьшаться до a, где знак $\dot{x}$ снова переменится. Отсюда следует, что при сделанных предположениях x — периодическая функция t с действительным периодом

$$\omega = 2 \int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}. \tag{3}$$

*) Профессор Хартри сообщил нам, что это решение действительно часто выдается механическими интегрирующими машинами, если не предпринимаются специальные меры предосторожности.

Одна из простейших форм уравнения этого типа возникает при исследовании движения простого маятника с начальными условиями: при $t=0$, $\theta=\theta_0$, $\dot\theta=\dot\theta_0$. Уравнение энергии есть

$$\dot\theta^2=\dot\theta_0^2+\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\theta_0)=\dot\theta_0^2+\frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{1}{2}\theta_0-\sin^2\frac{1}{2}\theta\right).$$

Это выражение положительно при $\theta=\theta_0$ и $\theta=0$ и не имеет нулей при $0<\theta<\theta_0$. Оно отрицательно для $\theta=\pi$ при условии, что

$$\dot\theta_0^2<\frac{2g}{l}(1+\cos\theta_0),$$

и тогда оно имеет простой корень между $\theta=\theta_0$ и $\theta=\pi$. Аналогичным образом оно имеет нуль между $-\theta_0$ и $-\pi$. Следовательно, θ есть функция t с действительным периодом.

Рассмотрим далее движение по центральной орбите с ускорением Ar^m, направленным к центру. Силовая функция на единицу массы равна

$$U=-\frac{Ar^{m+1}}{m+1}\quad(A>0).$$

Уравнения сохранения энергии и момента количества движения имеют вид

$$\dot r^2+r^2\dot\theta^2=\dot r_0^2+r_0^2\dot\theta_0^2+2(U-U_0)=V^2+2(U-U_0),$$

$$r^2\dot\theta=r_0^2\dot\theta_0,$$

откуда

$$\dot r^2=V^2-\frac{r_0^4\dot\theta_0^2}{r^2}+2(U-U_0)=f(r).$$

Можно видеть, что знак $f(r)$ изменяется следующим образом ($f(r_0)=\dot r_0^2>0$):

	$r\to 0$	$r=r_0$	$r\to\infty$
$m<-3$	$+\infty$	$+$	V^2-2U_0
$-3<m<-1$	$-\infty$	$+$	V^2-2U_0
$-1<m$	$-\infty$	$+$	$-\infty$

Следовательно, $f(r)$ всегда имеет пару нулей, расположенных по разные стороны от r_0, если $m>-1$ и если $-3<m<-1$ при условии, что $V^2<2U_0$. Легко видеть, что они являются простыми. Следовательно, при движении под действием центростремительного ускорения r является всегда периодической, если $m>-1$ (включая важный частный случай, когда силы пропорциональны расстоянию от центра) и если $-3<m<-1$ при условии, что $V^2<2U_0$. Последнее условие охватывает частный случай закона обратных квадратов $m=-2$ и критический случай параболического движения $V^2=2U_0$.

25.03. Дифференциальное уравнение для $\operatorname{sn}t$; обращение интеграла. Вышеприведенные рассуждения являются весьма

действенными, поскольку они позволяют нам при соответствующих условиях убедительно продемонстрировать периодичность только путем исследования дифференциального уравнения без необходимости предварительного его решения. Применим их к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2) = X^2, \qquad (1)$$

где k — действительное число, меньшее 1, а $\ddot{x}$ предполагается всегда существующим. При $x=0$ принимаем $dx/dt = +1$. Правая часть имеет простые корни при $x = \pm 1$, следовательно, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dX^2}{dx}$. Поэтому существует период

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 4K. \qquad (2)$$

Кроме того, если $t=0$ при $x=0$, то

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \qquad (3)$$

Это выражение известно как эллиптический интеграл первого рода, а K — как полный эллиптический интеграл первого рода. Интегралы этих видов затабулированы и много изучались Эйлером и Лежандром, однако вся теория претерпела значительное изменение в связи с замечанием Абеля. Ясно, что если $k=0$, то $t = \arcsin x$; таким образом изучение этих интегралов аналогично изучению $\arcsin x$ вместо значительно более удобной в обращении функции $\sin x$. Метод, предложенный Абелем и развитый Якоби, заключается в том, чтобы записать $\mathrm{sn}(t; k)$ вместо верхнего предела x в (3) и рассматривать это выражение как уравнение для определения верхнего предела в функции t, которая будет иметь период $4K$, аналогичный периоду 2π для круговых функций. Тогда $\mathrm{sn}(t; k)$ следует рассматривать как обобщение $\sin t$. Принято опускать явное представление k в случае, когда всюду имеется в виду одно и то же его значение.

Величина K может быть выражена в виде степенного ряда по k, если положить $x = \sin\varphi$. Тогда

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi\right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right)^2 k^{2n}\right\}. \qquad (4)$$

Это гипергеометрический ряд с радиусом сходимости 1.

Очевидно,

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{sn} K = 1; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(-t) &= -\operatorname{sn} t, \quad \operatorname{sn}(2K-t) = \operatorname{sn} t; \\ \operatorname{sn}(2K+t) &= -\operatorname{sn} t, \\ \frac{d}{dt}\operatorname{sn}(2K-t) &= -\frac{d}{dt}\operatorname{sn} t = \frac{d}{dt}\operatorname{sn}(2K+t). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

До сих пор мы рассматривали только действительные значения x и t. Но если $\operatorname{sn} t$ обладает аналитическим продолжением на комплексные значения t, то его можно принять в качестве дополнения к определению $\operatorname{sn} t$. Далее, поскольку равенства (6) справедливы для всех действительных значений в некоторых интервалах, то они будут также справедливы для всех значений, достижимых путем аналитического продолжения.

25.031. Поэтому мы должны установить, определяет ли при комплексных x уравнение (3) x как аналитическую функцию t и будет ли эта функция однозначной. По-прежнему принимаем k действительным и таким, что $0<k<1$. Другие значения k будут рассмотрены позже. Дифференциальное уравнение показывает, что t как функция x является аналитической в области, не содержащей точки ветвления X, где

$$X^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2). \tag{1}$$

Кроме того,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{dX^2}{dx}, \tag{2}$$

так что обобщение на комплексные значения сразу дает дополнительное условие, что это дифференциальное уравнение есть первый интеграл уравнения второго порядка вида $\ddot{x} = \frac{1}{2} f'(z)$. Интеграл для t сходится при $x \to \infty$, так что мы должны рассмотреть его поведение вблизи соответствующих значений t (которые будут зависеть от выбранного пути интегрирования), и x как функция t будет обращаться в бесконечность в этих точках.

Если $a \neq \alpha$, где α — одно из чисел ± 1, $\pm 1/k$, то разложение $t(x) - t(a)$ будет начинаться с линейного члена и ряд для t может быть обращен, что даст x как однозначную аналитическую функцию t внутри любого круга с центром в $t(a)$, такого, что ни одна из точек $x = \alpha$ не лежит внутри него и x не обращается в бесконечность. Вблизи любой из точек $x = \alpha$ имеем

$$t - t(\alpha) = (x-\alpha)^{1/2}\varphi(x), \tag{3}$$

где функция $\varphi(x)$ аналитическая и не равна нулю при $x=\alpha$. Это выражение вида, рассмотренного в **12.052**, причем x однозначен вблизи $t=t(\alpha)$, хотя $dx/dt=0$ в этих точках.

Для больших x на любом пути, уходящем в бесконечность,

$$t=\left[\int_0^\infty-\int_x^\infty\right]\frac{dx}{X}=M\pm\int_x^\infty\frac{dx}{kx^2}(1+\psi)=$$

$$=M\pm\frac{1}{kx}(1+\chi), \tag{4}$$

где M конечно, а ψ и χ — аналитические функции порядка $1/x$. Следовательно,

$$x=\pm\frac{1}{k(t-M)}+g(t), \tag{5}$$

где $g(t)$ — аналитическая функция при $t=M$. Точки $t=M$ являются поэтому простыми полюсами x с вычетами $\pm k$.

Следовательно, x есть однозначная аналитическая функция t на множестве значений t, принимаемых интегралом при всевозможных путях интегрирования, имеющая только простые полюсы.

Если бы X^2 было полиномом пятой степени относительно x или выше, не имеющим нулей кратности три или выше, то x как функция t было бы по-прежнему аналитическим при значениях t, обращающих X^2 в нуль. Но при больших x член вида $1/x$ в (4) заменился бы на член вида $x^{-\gamma}$, где $\gamma>1$. Следовательно, каждая точка, где x обращается в бесконечность, была бы точкой ветвления и x не было бы однозначным. Другими словами, мы могли бы изменять x вдоль незамкнутой дуги большого радиуса и прийти к тому же значению t, с которого начали.

Если бы X^2 было кубическим многочленом, то мы получили бы член с $x^{-1/2}$ вместо $1/x$ и x было бы по-прежнему однозначной функцией t, но с полюсами второго порядка вместо простых полюсов. Читатель может сам исследовать, что будет, если X^2 является многочленом первой или второй степени. Мы приходим к выводу, что этот интеграл определяет x как однозначную функцию t при условии, что X^2 есть полином не выше четвертой степени.

Отсюда сразу следует, что соотношения **25.03** (6) можно распространить на все дополнительные значения t, т. е. период $\operatorname{sn} t$ равен $4K$.

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение при $1<x<1/k$. Чтобы придать X определенный знак, будем считать, что x обходит 1 по полуокружности сверху так, что

$$\sqrt{1-x^2}=-i\sqrt{x^2-1}. \tag{6}$$

Тогда

$$t = K + i\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = K + iv, \tag{7}$$

и при $x \to 1/k$

$$t \to K + iK', \tag{8}$$

где

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{9}$$

Многочлен четвертой степени в знаменателе действителен и положителен в рассматриваемой области и имеет простые нули при $x=1$ и $x=1/k$. Тогда x есть функция v с периодом $2K'$. Следовательно, по (7) это есть функция t с периодом $2iK'$, и поэтому

$$\operatorname{sn}(t + 2iK') = \operatorname{sn} t \tag{10}$$

для всех t. Кроме того,

$$\operatorname{sn}(2iK' - t) = -\operatorname{sn} t. \tag{11}$$

Возьмем теперь x чисто мнимым, а путь интегрирования вдоль мнимой оси. Тогда если $x = iy$, то

$$t = i\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}. \tag{12}$$

Положим

$$\frac{1+y^2}{1+k^2y^2} = z^2 \tag{13}$$

и возьмем в качестве верхнего предела $x = i\infty$. Тогда

$$t = i\int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}} = iK'. \tag{14}$$

Следовательно, iK' есть полюс x, рассматриваемого как функция t. Кроме того, для больших y

$$t \doteq iK' - i\int_y^\infty \frac{dy}{ky^2} = iK' - \frac{i}{ky}, \tag{15}$$

$$x = iy \doteq \frac{1}{k(t - iK')} \tag{16}$$

и вычет $\operatorname{sn} t$ при iK' равен $+1/k$. Так как $2iK'$ есть период, существует другой полюс при $-iK'$ с вычетом $1/k$. Поскольку $\operatorname{sn}(2K + t) = -\operatorname{sn} t$, имеются полюсы при $2K + iK'$ с вычетами $-1/k$.

Величину K' можно представить в другом виде. Положим в (9),

$$z^2 = \frac{1-k^2x^2}{1-k^2}, \quad k'^2 = 1-k^2, \tag{17}$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}, \tag{18}$$

так что K' есть та же самая функция от k', что и K от k.

Если воспользоваться только путями, исходящими из $x=0$, такими, что $\operatorname{Im}(\infty) \geqslant 0$ при $\operatorname{Re} x$, заключенном между $\pm 1/k$, то t будет стремиться к iK' при стремлении x к бесконечности по любому направлению. На действительной оси t возрастает от 0 до K, когда x пробегает значения от 0 до 1; при дальнейшем росте x до значения $1/k$ действительная часть t остается постоянной, а мнимая часть растет до K'; при $x \to \infty$ мнимая часть остается постоянной, а действительная часть уменьшается до 0. Когда x идет от 0 к -1, $-1/k$, $-\infty$ (обходя -1 и $-1/k$ с положительной стороны), t проходит через $-K$, $-K+iK'$, iK'. Таким образом, t ограничено в полуплоскости x, и его действительная и мнимая части должны принимать наибольшее и наименьшее значения на границе. Следовательно, для всех x в верхней полуплоскости

$$-K \leqslant \operatorname{Re} t \leqslant K, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant K'.$$

Если взять пути интегрирования в нижней полуплоскости, то получим аналогичные результаты, за исключением того, что поменяются знаки мнимых частей. Следовательно, по любому t, удовлетворяющему этим неравенствам, можно найти значение x, и оно будет единственным, так как в области не содержится точек ветвления t. Однако этот интеграл не дает возможности определить t при $|\operatorname{Im} t| > K'$, если путь интегрирования не пересекает действительную ось при $\operatorname{Re} x > 1$ или $\operatorname{Re} x < -1$. Тем не менее можно сделать действительную и мнимую части t сколь угодно большими путем включения контуров, охватывающих *обе* точки ветвления. Интегралы по контурам C и C' в направлениях, показанных на рис. 72, равны $4K$ и $2iK'$, и, включая достаточное число контуров любого типа перед тем, как переходить от 0 к x, можно сделать действительную и мнимую части интеграла сколь угодно большими, положительными или отрицательными, не меняя dx/dt. С помощью изменения контура можно получить простое доказательство эквивалентности наших выражений (9) и (12) для K'. Действительно, L можно деформировать в M, не пересекая точку ветвления, и уйти в $-i\infty$ таким образом, как показано на рисунке. Петля вокруг части действительной оси дает в силу (9) $2iK'$, два интеграла от 0

до 1 сократятся, а интеграл от 0 до $-i\infty$ даст вклад, равный, но противоположный по знаку интегралу вдоль L. Поскольку интегралы вдоль L и M должны быть равны, то (9) и (12) эквивалентны.

Когда x меняется от -1 до 1 по любому пути в верхней полуплоскости, $\operatorname{Re} t$ проходит от $-K$ до K; следовательно, каждое значение $\operatorname{Re} t$ в этом интервале определяет кривую, идущую из точки между -1 и 1 на действительной оси к границе; на этой кривой $\operatorname{Im} t$ пробегает от 0 до K'. Следовательно, для любого t, удовлетворяющего условиям $-K<\operatorname{Re} t\leqslant K$,

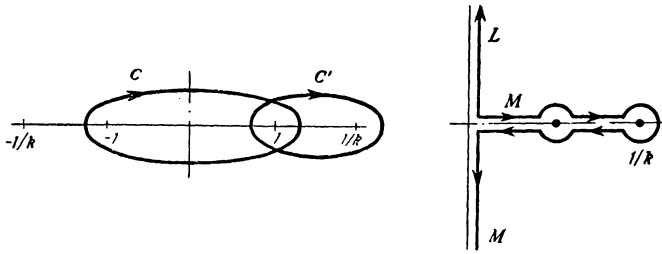

Рис. 72.

$0\leqslant \operatorname{Im} t\leqslant K'$ (за исключением $\operatorname{Re} t=0$, $\operatorname{Im} t=K'$, где x имеет полюс), существует значение x, определяемое путем интегрирования, выходящим из 0 при $\operatorname{Im} x\geqslant 0$. Аналогично, если

$$-K<\operatorname{Re} t\leqslant K;\quad -K'<\operatorname{Im} t\leqslant 0,$$

то существует подходящий путь с $\operatorname{Im} x\leqslant 0$. Следовательно, добавляя нужное число обходов по контурам C и C', можно придать t любое заданное конечное значение. Таким образом, интеграл обладает важным свойством: он может принимать любое значение t и, следовательно, его обращение определяет x на всей плоскости.

Можно взять путь интегрирования с одной только петлей около $x=+1$. Это даст $2K$, но x поменяет знак, когда пойдем обратно к 0. Взяв интеграл до $-x$, получим

$$\operatorname{sn}(2K+t)=-\operatorname{sn} t,\quad \frac{d}{dt}\operatorname{sn}(2K+t)=-\frac{d}{dt}\operatorname{sn} t. \tag{19}$$

Если брать интеграл до x, получим

$$\operatorname{sn}(2K-t)=\operatorname{sn} t. \tag{20}$$

Путем подходящей комбинации контуров C и C' с тем или иным направлением обхода и с петлей около $+1$ или без нее можно придать смысл $\operatorname{sn} t$ обращением интеграла для любого значения t. Следовательно, функция $\operatorname{sn} t$, определенная своим продолжением, является однозначной аналитической функцией

во всей плоскости t и имеет простые полюсы с вычетом $1/k$ во всех точках $4mK+(2n+1)iK'$ и простые полюсы с вычетом $-1/k$ во всех точках $(4m+2)K+(2n+1)iK'$, где m и n суть положительные или отрицательные целые числа. Эта функция является двоякопериодической с периодами $4K$ и $2iK'$.

25.04. Невозможность трех независимых периодов. Если аналитическая функция $f(z)$ отлична от постоянной и имеет набор периодов $\omega_1, \omega_2, \ldots$, то среди них должен существовать один с наименьшим модулем. Предположим, что это не так, и возьмем некоторую регулярную точку z. Тогда $f(z)=f(z+\omega_r)$ для всех r. Если не существует наименьшего $|\omega_r|$, то имеется бесконечно много точек $t=\omega_r$, для которых 0 является предельной точкой, так что $f(z+t)=f(z)$. Следовательно, $f(z+t)-f(z)=0$ для всех t, и поэтому, вопреки предположению, $f(z)$ — константа. Обозначим ω_r с наименьшим модулем через ω. Пусть Ω будет период, если таковой существует, с таким же аргументом, как у ω, но не кратный ω. Пусть m — такое целое число, что $m|\omega|<|\Omega|<(m+1)|\omega|$. Тогда $\Omega-m\omega$ есть период с модулем меньше, чем у ω, и мы пришли к противоречию. Следовательно, все периоды с тем же аргументом, что у ω, являются целыми кратными ω. Пусть ω' — период с наименьшим модулем, не являющийся целым кратным ω. Рассмотрим плоскость, образованную параллелограммами с вершинами в точках $m\omega+n\omega'$, где m и n — целые числа. Пусть ω'' будет третий период, если таковой существует, не выражающийся в виде $m\omega+n\omega'$. Тогда любое выражение вида $\omega''-m\omega-n\omega'$ также является периодом, и можно выбрать m и n так, чтобы он лежал внутри параллелограмма с вершинами O, ω, ω', $\omega+\omega'$. Обозначим такой период через Ω и проведем диагональ AC, соединяющую вершины тупых углов. Тогда если Ω лежит внутри треугольника OAC, то длина $O\Omega$ меньше, чем бо́льшая из величин $|\omega|$ и $|\omega'|$. Поэтому вопреки нашему предположению о том, что ω' — период с наименьшим модулем не кратный ω, длина $O\Omega$ меньше $|\omega'|$. Аналогично, если Ω лежит внутри ABC, то длина $B\Omega$ меньше, чем $|\omega'|$. Следовательно, аналитическая функция, отличная от постоянной, не может иметь более двух независимых периодов.

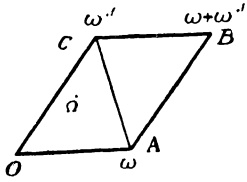

Рис. 73.

Этот результат интересен в связи с обращением интеграла вида $\int dx/X$, где X^2 — полином выше четвертой степени. Действительно, интеграл по контуру вокруг любых двух простых нулей X^2 должен определять период. Для X^2

не выше 4-й степени можно показать, что интегралы по таким контурам связаны соотношениями вида $\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\varepsilon''\omega''=0$, где ε, ε' и ε'' равны 0 или ± 1 и определяют не более двух независимых периодов. Для более высоких степеней существует больше независимых периодов, что возможно *только* потому, что функция уже не является однозначной. Такие функции называются *абелевыми*.

Назовем пару периодов ω и ω', определенных выше, *основными периодами*. Всякий параллелограмм с вершинами в точках z_0, $z_0+\omega$, $z_0+\omega'$, $z_0+\omega+\omega'$ будем называть основным параллелограммом. Обычно z_0 будет выбираться так, чтобы ни на одной стороне параллелограмма не было полюса. Большая часть теории эллиптических функций основывается на следующих двух простых теоремах:

25.05. *Интеграл от эллиптической функции по периметру основного параллелограмма равен нулю.* Действительно, если $ABCD$ — основной параллелограмм, то интегралы вдоль противоположных сторон AB и DC равны и противоположны по знаку в силу свойства периодичности и того факта, что стороны проходятся в противоположных направлениях. Аналогично этому взаимно уничтожаются интегралы вдоль BC и DA.

Эллиптическая функция, не имеющая особенностей в основном параллелограмме, равна постоянной. Действительно, если она ограничена в основном параллелограмме, то она ограничена во всей плоскости в силу периодичности и поэтому постоянна по теореме Лиувилля.

Если $f(z)$ — эллиптическая функция, то $f'(z)/f(z)$ — также эллиптическая функция. Применяя первую теорему к $f(z)$, видим, что *сумма вычетов во всех полюсах внутри основного параллелограмма равна нулю*. Применяя теорему к $f'(z)/f(z)$, видим, что *число полюсов $f(z)$ равно числу ее нулей, причем учитывается кратность полюсов и нулей*. То же самое справедливо для $f'(z)/[f(z)-c]$, где c — любая постоянная. Но полюсы $f(z)-c$ те же, что у $f(z)$; следовательно, $f(z)-c$ *имеет то же число нулей в основном параллелограмме, что и $f(z)$, независимо от величины c.*

Рассмотрим теперь следующий интеграл по периметру основного параллелограмма:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Если полюсы $f(z)$ находятся в точках α_r, а нули — в β_r, то этот интеграл равен $\sum\beta_r-\sum\alpha_r$, причем учитывается кратность полюсов и нулей. Но

$$\left[\int_{z_0}^{z_0+\omega}+\int_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'}\right]\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=-\omega'\int_{z_0}^{z_0+\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2\pi i p'\omega',$$

где p' — целое число. Аналогично интегралы вдоль двух других сторон дают кратное $2\pi i\omega$. Следовательно, *суммы значений z в нулях и полюсах $f(z)$ в основном параллелограмме отличаются на величину вида $p\omega + p'\omega'$, где p и p' — целые числа (возможно, нули).*

25.06. Другие эллиптические функции Якоби: cn, dn и т. д. Функция $\operatorname{sn} z$ имеет полюсы в каждом основном параллелограмме. Это удивительно для обобщения $\sin z$, но мы напомним, что $\sin z$ имеет существенную особенность на бесконечности. При $k \to 0$ мнимый период $\operatorname{sn} z$ стремится к бесконечности, и полюсы превращаются в существенную особенность на бесконечности.

В параллелограмме со сторонами $4K$, $4iK'$ имеется четыре полюса; следовательно, функция принимает каждое значение четыре раза в каждом параллелограмме.

Родственной $\operatorname{sn} t$ являются функции, соответствующие другим тригонометрическим функциям. Две первые определены следующим образом:

$$\operatorname{cn} t = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 t}; \qquad \operatorname{cn} 0 = 1,$$
$$\operatorname{dn} t = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t}; \quad \operatorname{dn} 0 = 1.$$

Нули и полюсы $1 - \operatorname{sn}^2 t$ и $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t$ являются двукратными, если эти функции рассматриваются в зависимости от t; следовательно, $\operatorname{cn} t$ и $\operatorname{dn} t$ однозначны при аналитическом продолжении. Другие функции определяются с помощью деления:

$$\operatorname{sc} t = \operatorname{sn} t/\operatorname{cn} t, \qquad \operatorname{cs} t = \operatorname{cn} t/\operatorname{sn} t,$$
$$\operatorname{sd} t = \operatorname{sn} t/\operatorname{dn} t, \qquad \operatorname{ds} t = \operatorname{dn} t/\operatorname{sn} t,$$
$$\operatorname{cd} t = \operatorname{cn} t/\operatorname{dn} t, \qquad \operatorname{dc} t = \operatorname{dn} t/\operatorname{cn} t,$$
$$\operatorname{ns} t = 1/\operatorname{sn} t, \qquad \operatorname{nc} t = 1/\operatorname{cn} t.$$
$$\operatorname{nd} t = 1/\operatorname{dn} t,$$

Тогда основное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sn} t = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t. \tag{1}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cn}^2 t = -\frac{d}{dt} \operatorname{sn}^2 t = -2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t,$$
$$\frac{d}{dt} \operatorname{cn} t = -\operatorname{sn} t \operatorname{dn} t, \tag{2}$$

и аналогично

$$\frac{d}{dt} \operatorname{dn} t = -k^2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t. \tag{3}$$

Поскольку

$$\operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{dn} K = k', \tag{4}$$

то

$$\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k, \quad \operatorname{cn}(K + iK') = -ik'/k, \quad \operatorname{dn}(K + iK') = 0. \tag{5}$$

Чтобы достичь значений t между K и $K + iK'$, x должно пройти $+1$ по верхней стороне; тогда $\sqrt{1-x^2}$ становится равным $-i\sqrt{x^2-1}$, и функция $\operatorname{cn} t$ отрицательная и мнимая в этих пределах. При $k = 0$ функция $\operatorname{cn} t$ сводится к $\cos t$, $\operatorname{dn} t$ — к 1, $\operatorname{sc} t$ — к $\operatorname{tg} t$ и т. д. Эти функции, кроме того, сводятся к элементарным в другом предельном случае $k = 1$; тогда

$$\operatorname{sn} t = \operatorname{th} t; \quad \operatorname{cn} t = \operatorname{dn} t = \operatorname{sech} t.$$

25.07. Дифференцирование. Путем непосредственных преобразований находим следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют рассматриваемые функции:

$$y = \operatorname{cn} t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(k'^2 + k^2y^2)},$$

$$y = \operatorname{nc} t \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{(y^2-1)(k'^2y^2 + k^2)},$$

$$y = \operatorname{dn} t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(y^2 - k'^2)},$$

$$y = \operatorname{nd} t \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{(y^2-1)(1-k'^2y^2)},$$

$$y = \operatorname{sc} t \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{(1+y^2)(1+k'^2y^2)},$$

$$y = \operatorname{ns} t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(y^2-1)(y^2-k^2)},$$

$$y = \operatorname{cs} t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(y^2+1)(y^2+k'^2)},$$

$$y = \operatorname{cd} t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

$$y = \operatorname{sd} t \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{(1-k'^2y^2)(1+k^2y^2)},$$

$$y = \operatorname{dc} t \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{(y^2-1)(y^2-k^2)},$$

$$y = \operatorname{ds} t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(y^2-k'^2)(y^2+k^2)}.$$

Корни берутся положительными при $0 \leqslant t \leqslant K$.

Заметим, что функции $\operatorname{ns} t$, $\operatorname{cs} t$ и $\operatorname{ds} t$ имеют полюсы с вычетом 1 в начале координат и что знаки коэффициентов при

главных частях в окрестностях нулей соответственно оба отрицательны, оба положительны и различны. Невиль счел удобным взять эти функции в качестве основных.

25.08. Вычеты в полюсах. Мы видели, что все полюсы $\operatorname{sn} t$ являются простыми с вычетами $\pm 1/k$; следовательно, все полюсы $\operatorname{cn} t$ простые с вычетами $\pm i/k$, а $\operatorname{dn} t$ с вычетами $\pm i$. При $x = sn\, t \to +\infty$, проходя $+1$ и $+1/k$ по положительной стороне, $t \to iK'$, $\operatorname{cn} t$ ведет себя как $-i \operatorname{sn} t$, $\operatorname{dn} t$ — как $-ik \operatorname{sn} t$. Но вычет $\operatorname{sn} t$ в iK' равен $1/k$, и поэтому вычеты $\operatorname{cn} t$ и $\operatorname{dn} t$ равны $-i/k$ и $-i$. Так как $\operatorname{cn} t$ и $\operatorname{dn} t$ — функции четные, их вычеты в $-iK'$ равны ik и i; действительно,

$$\frac{A}{t-\beta} - \frac{A}{t+\beta} = \frac{2A\beta}{t^2-\beta^2},$$

что является четной функцией t.

С точностью до знака, $\operatorname{cd} t$ и $\operatorname{sn} t$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Но если $K < t < 2K$, то $\operatorname{sn} t$ — убывающая функция. Так как это уравнение первого порядка и не содержит явно t, то, следовательно,

$$\operatorname{sn}(t+\gamma) = \operatorname{cd} t,$$

где γ — некоторая постоянная. При $\gamma = K$ это соотношение справедливо для $t = 0$ и поэтому универсально. Отсюда

$$\operatorname{sn}(t+K) = \operatorname{cn} t / \operatorname{dn} t. \tag{1}$$

Путем преобразований, принимая во внимание знаки функций между K и $2K$, получим

$$\operatorname{cn}(t+K) = -k' \operatorname{sn} t / \operatorname{dn} t, \quad \operatorname{dn}(t+K) = k' / \operatorname{dn} t. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sn}(t+2K) = -\operatorname{sn} t, \quad \operatorname{cn}(t+2K) = -\operatorname{cn} t, \quad \operatorname{dn}(t+2K) = \operatorname{dn} t. \tag{3}$$

Следовательно, $\operatorname{sn} t$ и $\operatorname{cn} t$ имеют период $4K$, а $\operatorname{dn} t$ имеет период $2K$. Это позволяет нам сказать, что вычеты $\operatorname{cn} t$ в $2K+iK'$ и $2K-iK'$ равны $+i/k$ и $-i/k$, а вычеты $\operatorname{dn} t$ равны $-i$ и $+i$.

В результате имеем следующую систему вычетов:

	iK'	$-iK'$	$2K+iK'$	$2K-iK'$
$\operatorname{sn} t$	$1/k$	$1/k$	$-1/k$	$-1/k$
$\operatorname{cn} t$	$-i/k$	$+i/k$	$+i/k$	$-i/k$
$\operatorname{dn} t$	$-i$	$+i$	$-i$	$+i$

Если положить $\operatorname{ns} t = kz$, то z, за исключением знака, удовлетворяет дифференциальному уравнению для $\operatorname{sn} t$. Следовательно, существует такое γ, что

$$\operatorname{sn}(t+\gamma) = \pm \frac{1}{k \operatorname{sn} t}.$$

Чтобы осуществить соответствие полюсов, возьмем $\gamma = iK'$ и при t малом принимаем знак положительным, так как вычет $\operatorname{sn} t$ равен $+1/k$ при $t = iK'$. Следовательно,

$$\operatorname{sn}(t + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} t}, \qquad \operatorname{sn}(t + 2iK') = \operatorname{sn} t. \tag{4}$$

Далее, выбирая соответствующие постоянные, получаем

$$\operatorname{cn}(t + iK') = -\frac{i \operatorname{dn} t}{k \operatorname{sn} t}, \tag{5}$$

$$\operatorname{dn}(t + iK') = -\frac{i \operatorname{cn} t}{\operatorname{sn} t}, \tag{6}$$

и поэтому

$$\operatorname{cn}(t + 2iK') = -\operatorname{cn} t, \qquad \operatorname{dn}(t + 2iK') = -\operatorname{dn} t. \tag{7}$$

Кроме того,

$$\operatorname{sn}(t + K + iK') = \frac{\operatorname{dn} t}{k \operatorname{cn} t}, \qquad \operatorname{cn}(t + K + iK') = -\frac{ik'}{k \operatorname{cn} t},$$

$$\operatorname{dn}(t + K + iK') = ik' \frac{\operatorname{sn} t}{\operatorname{cn} t}. \tag{8}$$

$$\operatorname{sn}(t + 2K + 2iK') = -\operatorname{sn} t, \qquad \operatorname{cn}(t + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} t,$$

$$\operatorname{dn}(t + 2K + 2iK') = -\operatorname{dn} t. \tag{9}$$

Поэтому для каждой из этих функций площадь параллелограммов периодов равна *половине* площади параллелограммов периодов со сторонами $4K$ и $4iK'$. Последний параллелограмм является параллелограммом периодов для всех этих функций. По этой причине обычно удобно использовать параллелограмм со сторонами $4K$ и $4iK'$.

25.09. Разложения на простейшие дроби и тригонометрические представления. Одним из наиболее плодотворных источников формул для эллиптических функций является сравнение главных частей в полюсах. Этот метод наиболее просто иллюстрируется на функциях $\operatorname{ns} t$, $\operatorname{cs} t$ и $\operatorname{ds} t$. Эти функции нечетные с вычетами 1 при $t = 0$. Результат прибавления $2K$, $2iK'$ и $2K + 2iK'$ к t показан в следующей таблице знаков:

	$2K$	$2iK'$	$2K + 2iK'$
sn	−	+	−
cn	−	−	+
dn	+	−	−
ns	−	+	−
cs	+	−	−
ds	−	−	+

Следовательно, по теореме Миттаг-Леффлера (функции ограничены на подходяще выбранной последовательности параллелограммов, уходящих в бесконечность)

$$\operatorname{ns} t = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t - 4mK - 4niK'} - \frac{1}{t - (4m+2)K - 4niK'} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{t - 4mK - (4n+2)iK'} + \frac{1}{t - (4m+2)K - (4n+2)iK'} \right],$$
$$\operatorname{cs} t = \sum\sum \left[\frac{1}{t - 4mK - 4niK'} + \frac{1}{t - (4m+2)K - 4niK'} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{t - 4mK - (4n+2)iK'} - \frac{1}{t - (4m+2)K - (4n+2)iK'} \right],$$
$$\operatorname{ds} t = \sum\sum \left[\frac{1}{t - 4mK - 4niK'} - \frac{1}{t - (4m+2)K - 4niK'} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{t - 4mK - (4n+2)iK'} + \frac{1}{t - (4m+2)K - (4n+2)iK'} \right].$$

Интегралы **25.03** (2), **25.031** (9) или (14) могут определять K и K' и при k комплексном (K имеет особенность при $k = \pm 1$, а K' при $k = 0$). В этом случае только что приведенные ряды будут по-прежнему сходиться и определять аналитические по t и k функции. Следовательно, они приводят к определениям эллиптических функций, удовлетворяющих тем же самым дифференциальным уравнениям даже при k комплексном, что позволяет снять требование действительности.

Тогда

$$\frac{\pi}{2K} \operatorname{ctg} \frac{\pi v}{2K} = \frac{1}{v} + \sum{}' \left(\frac{1}{v - 2nK} + \frac{1}{2nK} \right),$$
$$\frac{\pi}{2K} \operatorname{cosec} \frac{\pi v}{2K} = \frac{1}{v} + \sum{}' (-1)^n \left(\frac{1}{v - 2nK} + \frac{1}{2nK} \right),$$

и поэтому

$$\operatorname{ns} t = \frac{\pi}{2K} \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\pi t}{2K} + \sum_{1}^{\infty} \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (t - 2ntK') + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (t + 2ntK') \right] \right\} =$$
$$= \frac{\pi}{2K} \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi t}{2K} + \sum_{1}^{\infty} \frac{4 \sin \frac{\pi t}{2K} \operatorname{ch} \frac{n\pi K'}{K}}{\operatorname{ch} \frac{2n\pi K'}{K} - \cos \frac{\pi t}{K}} \right),$$
$$\operatorname{cs} t = \frac{\pi}{2K} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2K} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi t}{K}}{\operatorname{ch} \frac{4n\pi K'}{K} - \cos \frac{\pi t}{K}} - \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi t}{K}}{\operatorname{ch} \frac{(4n+2)\pi K'}{K} - \cos \frac{\pi t}{K}} \right],$$
$$\operatorname{ds} t = \frac{\pi}{2K} \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi t}{2K} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{4 \sin \frac{\pi t}{2K} \operatorname{ch} \frac{n\pi K'}{K}}{\operatorname{ch} \frac{2n\pi K'}{K} - \cos \frac{\pi t}{K}} \right].$$

Ряды быстро сходятся, если K'/K не очень мало. Физическую иллюстрацию дает решетка из заряженных проводников, регулярно расположенных в плоскостях таким образом, что каждая четверка проводников, сходящихся в углах ячейки, содержит два положительно и два отрицательно заряженных проводника. В таких условиях потенциал в точке определяется главным образом зарядами в соседних плоскостях, а вклады от более отдаленных зарядов почти уничтожаются.

25.10. Формулы сложения. Если v — постоянная, то $\operatorname{sn}(u+v)$ — эллиптическая функция u с теми же периодами, что и $\operatorname{sn} u$. При $k=0$ и $k=1$ эту функцию можно выразить через функции переменных u и v следующим образом:

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$

$$\operatorname{th}(u+v) = \frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}.$$

Между этими двумя формулами не видно такого сходства, которое помогло бы найти аналогичные формулы для произвольного k. Однако для малых v при любом k имеем

$$\operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v + O(v^2).$$

В силу симметрии должно быть

$$\operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v + O(u^2v^2).$$

При $k=0$ остаточный член пропадает. При $k=1$ правая часть равна

$$\operatorname{th} u \operatorname{sech}^2 v + \operatorname{th} v \operatorname{sech}^2 u + O(u^2v^2) =$$
$$= (\operatorname{th} u + \operatorname{th} v)(1 - \operatorname{th} u \operatorname{th} v) + O(u^2v^2) =$$
$$= (1 - \operatorname{th}^2 u \operatorname{th}^2 v) \operatorname{th}(u+v) + O(u^2v^2).$$

Таким образом, оба крайних случая охватываются формулой

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v}{1 - f(k) \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

где $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Для произвольного k эта формула верна с точностью до $O(u^2v^2)$.

Далее, $\operatorname{sn}(u+v)$ как функция u имеет полюс в точке $iK'-v$. Но числитель может обращаться в бесконечность только тогда,

когда сами u или v имеют вид $iK' + 2mK + 2niK'$. Следовательно, полюс может появиться только при обращении в нуль знаменателя. Но

$$\operatorname{sn}(iK' - v) = -\frac{1}{k \operatorname{sn} v},$$

и поэтому знаменатель может обращаться в нуль при всех v тогда и только тогда, когда

$$f(k) = k^2.$$

Тогда

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \qquad (1)$$

Поэтому, если существует формула, выражающая $\operatorname{sn}(u+v)$ через эллиптические функции переменных u и v, то она должна иметь вид (1). Остается показать, что формула (1) верна.

Простейший способ состоит в сравнении вычетов. Левая часть имеет полюсы $u = -v \pm iK'$ с вычетами $1/k$ и полюс $u = -v + 2K + iK'$ с вычетом $-1/k$. Прибавление $2K$ к u изменяет знак обеих частей (1). Обе части имеют период $2iK'$. Поэтому нужно рассматривать только $u = -v + iK'$.

В каждом из полюсов функции $\operatorname{sn} u$ правая часть аналитична. Следовательно, полюсы правой части могут появляться только при обращении в нуль знаменателя и должны быть простыми. Знаменатель обращается в нуль при $u = -v \pm iK'$, а также при $u = v \pm iK'$. Поэтому нужно также рассматривать $u = v + iK'$. Но

$$\operatorname{sn}(v+iK') \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn}(v+iK') \operatorname{dn}(v+iK') =$$
$$= \frac{1}{k \operatorname{sn} v} \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \left(-\frac{i}{k}\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}\right)\left(-i\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}\right) = 0,$$

и поэтому $v + iK'$ не является полюсом правой части. Следовательно, левая и правая части имеют одни и те же полюсы. Кроме того, если $u + v - iK'$ мало и равно, скажем, θ, то

$$\operatorname{sn}^2(iK' - v + \theta) = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2(v-\theta)} = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 v} + \frac{2 \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{k^2 \operatorname{sn}^3 v}\theta + O(\theta^2),$$

и правая часть (1) равна

$$\frac{2}{k}\frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v} \Big/ \frac{2 \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}\theta = \frac{1}{k\theta}.$$

Следовательно, обе функции имеют одни и те же полюсы с одинаковыми вычетами и поэтому могут различаться только

на постоянную, которая, как можно показать, полагая $u=0$, равна 0.

С другой стороны, зная, что обе части (1) имеют одни и те же полюсы и нули, мы заключаем, что их отношение равно постоянной. Полагая u малым, можно доказать, что эта постоянная равна 1.

Соответствующие формулы для $\operatorname{cn}(u+v)$ и $\operatorname{dn}(u+v)$ имеют вид

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \tag{2}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \tag{3}$$

Их легко проверить непосредственно.

Нам представлялось интересным показать, как эти формулы *можно* было бы найти, зная крайние случаи. На самом деле они были найдены совершенно другим способом. Эйлер нашел сложное равенство для эллиптических *интегралов*, которое, если его переписать в обозначениях Якоби, переходит в (1).

Другой способ проверки, совершенно непосредственный, но скорее пригодный для скрашивания долгого пребывания в зале ожидания вокзала, состоит в том, чтобы продифференцировать правые части равенств и показать, что для каждого из них производные по u и по v одинаковы. Поэтому правые части — функции $u+v$, а их равенство устанавливается, если положить $u=0$.

25.11. Представление функций $\operatorname{sn} t$, $\operatorname{cn} t$ и $\operatorname{dn} t$ в виде бесконечных произведений. Функция $d(\ln \operatorname{sn} t)/dt$ имеет простые полюсы с вычетами $+1$ в нулях функции $\operatorname{sn} t$ и простые полюсы с вычетами -1 в полюсах $\operatorname{sn} t$. Поэтому по теореме Миттаг-Леффлера имеем

$$\frac{d}{dt}\ln \operatorname{sn} t-\frac{1}{t}=\sum_{-\infty}^{\infty}{\sum}'\left(\frac{1}{t-2niK'-2mK}+\frac{1}{2niK'+2mK}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t-(2n+1)iK'-2mK}-\frac{1}{(2n+1)iK'+2mK}\right),$$

причем в первых двух членах значения $m=0$, $n=0$ исключаются. Если взять одинаковое число членов с положительными и отрицательными значениями m и n, то постоянные члены уничтожатся.

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\ln \operatorname{sn} t =$$

$$= \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2K} + \sum{}' \operatorname{ctg}\frac{\pi\,(t-2niK')}{2K} - \sum \operatorname{ctg}\frac{\pi\,[t-(2n+1)\,iK']}{2K}\right\},$$

$$\operatorname{sn} t = A \sin\frac{\pi t}{2K}\,\frac{\prod\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \sin\dfrac{\pi\,(t-2niK')}{2K}}{\prod\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\dfrac{\pi\,[t-(2n+1)\,iK']}{2K}} =$$

$$= A \sin\frac{\pi t}{2K}\,\frac{\prod\limits_{1}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\dfrac{2n\pi K'}{K} - \cos\dfrac{\pi t}{K}\right)}{\prod\limits_{1}^{\infty}\left[\operatorname{ch}\dfrac{(2n-1)\,\pi K'}{K} - \cos\dfrac{\pi t}{K}\right]}.$$

Положим $iK' = K\tau$, $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi K'/K}$. Примем, что $\operatorname{Re}(K'/K) > 0$. Тогда $|q| < 1$ и

$$\operatorname{sn} t = A' \sin\frac{\pi t}{2K}\prod_{1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\dfrac{\pi t}{K}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\dfrac{\pi t}{K}+q^{4n-2}} =$$

$$= \frac{2K}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2K}\prod_{1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1-q^{2n})^2}\,\frac{1-2q^{2n}\cos\dfrac{\pi t}{K}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\dfrac{\pi t}{K}+q^{4n-2}},$$

причем значение постоянной устанавливается из требования, чтобы получалось правильное значение производной при $t = 0$. Все произведения абсолютно сходятся, так как $|q| < 1$. Аналогично

$$\frac{d}{dt}\ln \operatorname{cn} t = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t-(2m+1)\,K-2niK'} - \frac{1}{t-(2n+1)\,iK'-2mK}\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2K}\left\{\sum_{0}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi\,(t-2niK')}{2K} + \sum_{0}^{\infty}\operatorname{ctg}\frac{\pi\,[t-(2n+1)\,iK']}{2K}\right\},$$

откуда

$$\operatorname{cn} t = \cos\frac{\pi t}{2K}\prod_{1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1})^2\left(1+2q^{2n}\cos\dfrac{\pi t}{K}+q^{4n}\right)}{(1+q^{2n})^2\left(1-2q^{2n-1}\cos\dfrac{\pi t}{K}+q^{4n-2}\right)}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{dn} t = \prod_1^\infty \frac{(1-q^{2n-1})^2\left(1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi t}{K}+q^{4n-2}\right)}{(1+q^{2n-1})^2\left(1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi t}{K}+q^{4n-2}\right)}.$$

25.111. Тэта-функции. В приведенных формулах эллиптические функции представлены в виде отношений четырех целых функций, каждая из которых имеет период $4K$. Эти функции можно представить в виде рядов. Удобно положить

$$z = \frac{\pi t}{2K}. \tag{1}$$

Тогда период становится равным 2π. Каждую из четырех целых функций при постоянной мнимой части z можно представить в виде ряда Фурье, который можно продолжить на другие значения мнимой части z (если ряд остается сходящимся). Возьмем сначала

$$\varphi(z) = \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}) =$$

$$= \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}e^{2iz})(1 - q^{2n-1}e^{-2iz}), \quad q = e^{\pi i\tau}.$$

Тогда

$$\varphi(z + \pi\tau) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n+1}e^{2iz})(1 - q^{2n-3}e^{-2iz}) =$$

$$= \frac{1 - q^{-1}e^{-2iz}}{1 - qe^{2iz}}\varphi(z) = -q^{-1}e^{-2iz}\varphi(z). \tag{2}$$

Далее, если

$$\varphi(z) = A_0 + 2A_2\cos 2z + 2A_4\cos 4z + \ldots =$$
$$= A_0 + A_2(e^{2iz} + e^{-2iz}) + A_4(e^{4iz} + e^{-4iz}) + \ldots,$$

то

$$\varphi(z + \pi\tau) = A_0 + A_2(q^2e^{2iz} + q^{-2}e^{-2iz}) + A_4(q^4e^{4iz} + q^{-4}e^{-4iz}) + \ldots.$$

С другой стороны,

$$\varphi(z + \pi\tau) = -q^{-1}e^{-2iz}[A_0 + A_2(e^{2iz} + e^{-2iz}) + \ldots].$$

Приравнивая коэффициенты, находим

$$\varphi(z) = A_0\left[1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\cos 2nz\right], \tag{3}$$

полагая по определению

$$\varphi(z) = A_0\vartheta_0(z). \tag{4}$$

Далее, подставляя последовательно значения аргумента $z+\frac{1}{2}\pi$, $z+\frac{1}{2}\pi\tau$, $z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$, находим

$$\varphi\left(z+\tfrac{1}{2}\pi\right)=\prod_1^\infty(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}), \tag{5}$$

$$\varphi\left(z+\tfrac{1}{2}\pi\tau\right)=2ie^{-iz}\sin z\prod_1^\infty(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}), \tag{6}$$

$$\varphi\left(z+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\pi\tau\right)=2e^{-iz}\cos z\prod_1^\infty(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}). \tag{7}$$

Три функции $\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$ определяются через функцию $\vartheta_0(z)$ и представляются в виде рядов следующим образом:

$$\vartheta_0\left(z+\tfrac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_3(z),\quad \vartheta_3(z)=1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos 2nz, \tag{8}$$

$$\vartheta_0\left(z+\tfrac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-1/4}e^{-iz}\vartheta_1(z),$$

$$\vartheta_1(z)=2\sum_{n=0}^\infty(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)z, \tag{9}$$

$$\vartheta_0\left(z+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-1/4}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

$$\vartheta_2(z)=2\sum_{n=0}^\infty q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)z. \tag{10}$$

Четыре функции ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 называются тэта-функциями Якоби [2] *). Они непосредственно связаны с четырьмя бесконечными произведениями, через которые, как мы показали, выражаются функции sn, cn, dn. В самом деле, если положить $1/A_0=G$, то

$$\vartheta_0=G\prod_1^\infty(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}), \tag{11}$$

$$\vartheta_1=2Gq^{1/4}\sin z\prod_1^\infty(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}), \tag{12}$$

$$\vartheta_2=2Gq^{1/4}\cos z\prod_1^\infty(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}), \tag{13}$$

$$\vartheta_3=G\prod_1^\infty(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}), \tag{14}$$

*) Уиттекер и Ватсон обозначают функцию ϑ_0 через ϑ_4. Их $\vartheta_r(\pi z)$ соответствуют нашим $\vartheta_r(z)$.

и тогда

$$\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\pi}=\frac{K}{\pi}q^{-1/4}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_0(z)}\prod\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1-q^{2n})^2}, \tag{15}$$

$$\operatorname{cn}\frac{2Kz}{\pi}=\frac{1}{2}q^{-1/4}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_0(z)}\prod\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n})^2}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_0(z)}, \tag{16}$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Kz}{\pi}=\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_0(z)}\prod\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n-1})^2}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_0(z)}. \tag{17}$$

Можно легко проверить, что каждая из тэта-функций удовлетворяет уравнению теплопроводности в виде

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=\frac{4i}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}. \tag{18}$$

Ввиду того что $\operatorname{cn}0=\operatorname{dn}0=1$, имеем

$$\frac{\vartheta_2(0)}{2q^{1/4}\prod(1+q^{2n})^2}=\frac{\vartheta_3(0)}{\prod(1+q^{2n-1})^2}=\frac{\vartheta_0(0)}{\prod(1-q^{2n-1})^2}=G. \tag{19}$$

При $z=\frac{1}{2}\pi$ функция $\operatorname{dn}2Kz/\pi=k'$. Отсюда

$$\sqrt{k'}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}. \tag{20}$$

Далее при $z=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$ функция $\operatorname{cn}2Kz/\pi=-ik'/k$. Тогда $\sqrt{\frac{k'}{k}}=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}$, откуда

$$\sqrt{k}=\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \tag{21}$$

и

$$\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_0(z)}, \tag{22}$$

причем постоянный множитель выбран так, что $\operatorname{sn}2Kz/\pi=1/k$ при $z=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$. Следовательно, имеем также

$$\operatorname{cn}\frac{2Kz}{\pi}=\left(\frac{k'}{k}\right)^{1/2}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_0(z)},\quad \operatorname{dn}\frac{2Kz}{\pi}=k'^{1/2}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_0(z)}. \tag{23}$$

Формулу (22) можно переписать в виде

$$\vartheta_1(z)=\sqrt{k}\,\vartheta_0(z)\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\pi}, \tag{24}$$

откуда

$$\vartheta_1'(z)=\sqrt{k}\left[\vartheta_0'(z)\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\pi}+\frac{2K}{\pi}\vartheta_0(z)\operatorname{cn}\frac{2Kz}{\pi}\operatorname{dn}\frac{2Kz}{\pi}\right] \tag{25}$$

и

$$\vartheta_1'''(0) = \sqrt{k}\left[\frac{6K}{\pi}\vartheta_0''(0) - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \vartheta_0(0)(1+k^2)\right],$$

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{3\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1+k^2). \tag{26}$$

Но из (23) следует

$$\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} = \frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2, \quad \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} - k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2; \tag{27}$$

откуда

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} + \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}. \tag{28}$$

Из уравнения в частных производных (18) следует, что (28) равносильно соотношению

$$\frac{d}{d\tau}\ln\vartheta_1'(0) = \frac{d}{d\tau}\ln[\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)],$$

и, следовательно,

$$\vartheta_1'(0) = c\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0),$$

где c не зависит от τ и z. Рассматривая в каждом представлении в виде ряда низшую степень q, находим, что

$$c = 1,$$

откуда

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0). \tag{29}$$

Далее

$$\left(\frac{d}{dz}\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\pi}\right)_{z=0} = \frac{2K}{\pi}.$$

Отсюда и из (13), (14), (15) имеем

$$1 = \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)} = \frac{\prod(1-q^{2n})^2}{G^2\prod(1+q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n-1})^2}. \tag{30}$$

Бесконечное произведение в знаменателе равно единице. В самом деле

$$\prod(1+q^{2n})(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) = \prod(1+q^n)(1-q^{2n-1}) =$$

$$= \prod\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})}{1-q^n} = 1. \tag{31}$$

Следовательно,

$$G = \prod_1^\infty(1-q^{2n}). \tag{32}$$

Кроме того, из (22) получаем

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_0(0)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0) = \vartheta_3^2(0) \tag{33}$$

и

$$iK' = \tau K = \frac{1}{2}\pi\tau\vartheta_3^2(0). \tag{34}$$

Тэта-функции имеют один период, равный π или 2π, что удобно при решении задач, связанных с фиксированными границами. Ряды для тэта-функций сходятся чрезвычайно быстро. Если $K'/K = 1$, то $q = e^{-\pi}$ и практически всегда можно пренебрегать q^4. (Мы всегда можем сделать такое преобразование, что будет выполняться неравенство $K'/K \geqslant 1$. Действительно, из дифференциальных уравнений видно, что если положить $t = iu$, то дифференциальное уравнение для $\operatorname{sc} t$ переходит в уравнение для $\operatorname{sn} t$ с модулем k'. Такое преобразование называется мнимым преобразованием Якоби.) С другой стороны, часто k бывает задано, а требуется найти оба периода. Тогда более удобно пользоваться sn, cn и dn.

Это преобразование тэта-функций тесно связано с тождеством, которое было получено в связи с задачами теплопроводности. Из **20.02** (7), (12) при всех положительных t и при $0 < x < l$ имеем

$$\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{l} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2h^2t}{l^2}\right) =$$

$$= 1 - \sum_{r=0}^{\infty}\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x+2rl}{2ht^{1/2}}\right) + \sum_{r=0}^{\infty}\left[1 - \operatorname{erf}\frac{2(r+1)\,l - x}{2ht^{1/2}}\right].$$

Это соотношение можно продолжить на все x. Продифференцируем по x и умножим на l. Тогда

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{l} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2h^2t}{l^2}\right) = \frac{l}{h\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4h^2t}} \times$$

$$\times \left(1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\frac{r^2l^2}{h^2t}} \operatorname{ch}\frac{rlx}{h^2t}\right).$$

Положим

$$\frac{\pi x}{l} = 2z, \quad \sigma = \frac{\pi h^2 t}{l^2} = -i\tau = \frac{K'}{K},$$

тогда

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nz \exp(-\pi n^2\sigma) = \sigma^{-1/2} e^{-z^2/\pi\sigma}\left(1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\pi r^2/\sigma} \operatorname{ch}\frac{2rz}{\sigma}\right),$$

следовательно,

$$\vartheta_3(z;\sigma)=\sigma^{-1/2}e^{-z^2/\pi\sigma}\vartheta_3\left(\frac{iz}{\sigma};\frac{1}{\sigma}\right).$$

Обычно эта формула записывается через τ. Но пользоваться σ удобнее, так как в большинстве приложений σ действительно. Принятые здесь обозначения позволяют использовать σ явно. При малых σ начальные члены ряда в левой части равенства убывают медленно, а в правой части при $\operatorname{Re} z<\pi$ — быстро. Правая часть такова, что периодичность по $\operatorname{Re} z$ не указана в явном виде. Однако при значениях $\operatorname{Re} z>\pi$ значения функции можно получить из условия периодичности.

Используя соотношения (8), (9), (10), можно вывести соответствующие формулы для других тэта-функций:

$$\vartheta_0(z;\sigma)=\sigma^{-1/2}e^{-z^2/\pi\sigma}\vartheta_2\left(\frac{iz}{\sigma};\frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\vartheta_2(z;\sigma)=\sigma^{-1/2}e^{-z^2/\pi\sigma}\vartheta_0\left(\frac{iz}{\sigma};\frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\vartheta_1(z;\sigma)=-i\sigma^{-1/2}e^{-z^2/\pi\sigma}\vartheta_1\left(\frac{iz}{\sigma};\frac{1}{\sigma}\right).$$

25.112. Сдвиг аргумента. Если аргумент тэта-функции увеличить на $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi\tau$ или $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$, то получится другая тэта-функция, умноженная на простой множитель. Следующая таблица содержит получающиеся результаты; некоторыми из них мы уже пользовались; при этом

$$M=q^{-1/4}e^{-iz},\quad M'=q^{-1/2}M^2=q^{-1}e^{-2iz}.$$

z	$z+\frac{1}{2}\pi$	$z+\frac{1}{2}\pi\tau$	$z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$	$z+\pi$	$z+\pi\tau$	$z+\pi+\pi\tau$
ϑ_0	ϑ_3	$iM\vartheta_1$	$M\vartheta_2$	ϑ_0	$-M'\vartheta_0$	$-M'\vartheta_0$
ϑ_1	ϑ_2	$iM\vartheta_0$	$M\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-M'\vartheta_1$	$M'\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$M\vartheta_3$	$-iM\vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$M'\vartheta_2$	$-M'\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$M\vartheta_2$	$iM\vartheta_1$	ϑ_3	$M'\vartheta_3$	$M'\vartheta_3$

25.113. Выражение эллиптической функции с заданными периодами через тэта-функции. Поскольку

$$\vartheta_1(z+\pi)=-\vartheta_1(z),\quad \vartheta_1(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}\vartheta_1(z),$$

имеем

$$\frac{\vartheta_1'(z+\pi)}{\vartheta_1(z+\pi)}=\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)},\quad \frac{\vartheta_1'(z+\pi\tau)}{\vartheta_1(z+\pi\tau)}=-2i+\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)}.$$

Следовательно, функция $\vartheta_1'(z)/\vartheta_1(z)$ имеет период π. При $z=0$, $\pi\tau$, $\pi+\pi\tau$, ... она имеет простые полюсы с вычетами 1. Ее производная имеет также период $\pi\tau$.

Это свойство можно использовать для того, чтобы выразить эллиптическую функцию $\varphi(u)$ с периодами ω и ω' через ϑ_1'/ϑ_1. Положим

$$\varphi(u)=f\left(\frac{\pi u}{\omega}\right)=f(\tau), \quad \omega'/\omega=\tau,$$

где ω' и ω выбраны так, что $\operatorname{Im}(\omega'/\omega)>0$.

Тогда функция $f(z)$ имеет периоды π, $\pi\tau$. Пусть полюсы $f(z)$ в основном параллелограмме — простые полюсы в точках α_1, α_2, ... с вычетами A_1, A_2, ... Тогда

$$F(z)=\sum A_i \frac{\vartheta_1'(z-\alpha_i)}{\vartheta_1(z-\alpha_i)}$$

может отличаться от $f(z)$ лишь на целую функцию. Далее

$$F(z+\pi)=F(z),$$

$$F(z+\pi\tau)=\sum A_i \frac{\vartheta_1'(z-\alpha_i)}{\vartheta_1(z-\alpha_i)}-2i\sum A_i=F(z),$$

так как $\sum A_i$ является суммой вычетов функции $f(z)$ в основном параллелограмме и поэтому равна нулю. Следовательно,

$$f(z)-F(z)=\text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\int f(z)\,dz=\sum A_i \ln \vartheta_1(z-\alpha_i)+Cz.$$

Таким образом, интеграл от любой эллиптической функции, имеющей только простые полюсы, выражается через ϑ_1.

Это утверждение можно сразу распространить на функции с кратными полюсами, если использовать производную функции ϑ_1'/ϑ_1.

Далее, если функция $f(z)$ имеет n полюсов α_i и n нулей β_i, то можно выбрать функцию

$$G(z)=\frac{\prod \vartheta_1(z-\beta_i)}{\prod \vartheta_1(z-\alpha_i)},$$

в которой для кратных нулей и полюсов сомножители повторяются соответствующее число раз. Тогда

$$G(z+\pi)=G(z),$$

так как число полюсов и число нулей одинаково. Кроме того,

$$G(z+\pi\tau)=\frac{\exp\left(2i\sum\beta_i\right)}{\exp\left(2i\sum\alpha_i\right)}G(z).$$

Но $\sum\beta_i-\sum\alpha_i$ имеет вид $p\pi+q\pi\tau$, где p и q — целые числа. Эту разность можно сделать равной нулю подходящим выбором β_i и α_i, выходя, если это необходимо, за пределы исходного параллелограмма. Тогда $f(z)/G(z)$ — постоянная.

25.12. Приведение эллиптических интегралов к стандартному виду. Пусть $R(x)$ — многочлен четвертой степени с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней. Если сделать дробно-линейное преобразование

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}, \tag{1}$$

то $R(x)$ принимает вид $R_1(t)/(\gamma t+\delta)^4$, где $R_1(t)$ — новый многочлен четвертой степени, а dx/dt пропорциональна $(\gamma t+\delta)^{-2}$. Следовательно, $\int dx/\sqrt{R(x)}$ преобразуется к виду $\int dt/\sqrt{R_1(t)}$. Мы хотим выбрать такое преобразование, чтобы функция $R_1(t)$ была четной. Пусть корнями $R(x)$ служат a, b, c, d, а корни $R_1(t)$ будут $-h$, $-g$, g, h. Испробуем преобразование

$$\frac{x-b}{x-c}=l\frac{t+g}{t-g}. \tag{2}$$

Тогда b переходит в $-g$, а c переходит в $+g$. Для соответствия остальных корней должно быть

$$\frac{a-b}{a-c}=l\frac{-h+g}{-h-g}=l\frac{h-g}{g+h},\quad \frac{d-b}{d-c}=l\frac{h+g}{h-g}, \tag{3}$$

откуда

$$\left(\frac{g+h}{g-h}\right)^2=\frac{d-b}{d-c}\,\frac{a-c}{a-b}. \tag{4}$$

Далее

$$l=\frac{a-b}{a-c}\,\frac{g+h}{h-g}. \tag{5}$$

Тогда, если произвольно выбрать g, то h определится из (4), а l — из (5).

Случай 1. Пусть все корни действительны и $a<b<c<d$. Тогда при действительном g оказывается, что h действительно. Положим $g=1$. Выбирая положительный знак корня, имеем

$$\frac{h+1}{h-1}>1,\quad h>1, \tag{6}$$

$$R_1(t)=C(t^2-1)(t^2-h^2)=C'(1-t^2)(1-k^2t^2). \tag{7}$$

Это преобразование приводит к $t=A\,\mathrm{sn}\,u$ при $k=1/n<1$.

Случай 2. Пусть b и c — действительные, а a и d — комплексные сопряженные числа. Положим $g = 1$. Тогда

$$\left|\frac{g+h}{g-h}\right| = 1, \tag{8}$$

и $h = ij$ — чисто мнимая величина. При этом

$$R_1(t) = C(1-t^2)(1+j^2t^2), \tag{9}$$

и интегрирование можно провести, используя подстановку $t = \operatorname{cn} u$, $\operatorname{sd} u$ или $\operatorname{ds} u$.

Случай 3. Пусть a и d, b и c — попарно комплексно сопряженные числа. Выберем $g = i$. Тогда h — число мнимое, так как (4) по-прежнему действительно. Поэтому

$$R_1(t) = C(1+t^2)(1+\nu^2t^2). \tag{10}$$

Интегрирование можно произвести при помощи подстановки $t = \operatorname{sc} u$ и $\operatorname{cs} u$.

Интегралы вида $\int dt/\sqrt{R_1(t)}$ называются эллиптическими интегралами первого рода и их можно выразить через функции sn, cn, dn. Более сложные интегралы, содержащие квадратный корень из многочлена четвертой степени, можно свести к виду

$$\int \frac{tf_1(t^2)+f_2(t^2)}{\sqrt{R_1(t)}}\,dt, \tag{11}$$

где f_1 и f_2 — рациональные функции. Далее такие интегралы путем разложения на простейшие дроби можно свести к слагаемым вида

$$\int \frac{tf_1(t^2)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}, \quad \int \frac{t^{2p}\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}, \quad \int \frac{dt}{(1+nt^2)^p\sqrt{R_1(t)}}. \tag{12}$$

Слагаемые первого вида дают элементарную функцию. Для определенности остановимся на случае, когда $R_1(t) = (1-t^2)\times$ $\times(1-k^2t^2)$. Второй интеграл при помощи подстановки $t = \operatorname{sn} u$ сводится к

$$u_p = \int \operatorname{sn}^{2p} u\,du.$$

Но

$$\frac{d}{du}(\operatorname{sn}^{2p-3} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u) = (2p-3)\operatorname{sn}^{2p-4} u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{sn}^{2p-2} u \operatorname{dn}^2 u -$$
$$- k^2 \operatorname{sn}^{2p-2} u \operatorname{cn}^2 u = \alpha \operatorname{sn}^{2p} u + \beta \operatorname{sn}^{2p-2} u + \gamma \operatorname{sn}^{2p-4} u,$$

где α, β, γ — постоянные. Поэтому последовательным приведением u_p можно свести к u и $\int \mathrm{sn}^2 u\, du$. Интеграл в стандартном виде

$$E(u) = \int_0^u \mathrm{dn}^2 u\, du = \int_0^{\mathrm{sn}\, u} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx \tag{13}$$

называется эллиптическим интегралом второго рода.

Полный эллиптический интеграл второго рода имеет вид

$$E = E(K) = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u\, du. \tag{14}$$

Функция $E(u)$ не периодическая. Однако функция

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} n \tag{15}$$

имеет период $2K$. Она называется эллиптической дзета-функцией. Ее не следует путать с дзета-функцией Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Интегралы третьего вида в (12) называются эллиптическими интегралами третьего рода. Ценой длинных алгебраических преобразований их можно выразить через тэта-функции. Вероятно, как правило, численное интегрирование является лучшим способом их вычисления.

Интегралы от эллиптических функций всегда могут быть выражены через тэта-функции. По поводу необходимых преобразований следует обращаться к специальным руководствам.

25.13. Полные эллиптические интегралы. Полные эллиптические интегралы часто появляются при рассмотрении определенных интегралов. Они полностью табулированы, но при пользовании таблицами нужна осторожность: иногда k обозначается через $\sin\alpha$, а иногда через $\sin\frac{\alpha}{2}$. Последнее обозначение — пережиток тех времен, когда маятник был единственным приложением K. Величина x часто обозначается через $\sin\varphi$, а $\sqrt{1-k^2x^2}$ через $\Delta\varphi$. Представляют интерес приближенные выражения для K' и E' при малых k. Имеем

$$K' = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta'(\varphi)},$$

где $\Delta' = (1 - k'^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$;

$$K' = \int_0^{1/2\pi} \frac{1 - k' \sin \varphi}{\Delta'(\varphi)}\, d\varphi + \int_0^{1/2\pi} \frac{k' \sin \varphi}{\Delta'(\varphi)}\, d\varphi = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_0^{1/2\pi} \sqrt{\frac{1 - k' \sin \varphi}{1 + k' \sin \varphi}}\, d\varphi \to \int_0^{1/2\pi} \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}}\, d\varphi = \ln 2.$$

Интеграл I_2 можно проинтегрировать точно:

$$I_2 = -\int_{\varphi=0}^{1/2\pi} \frac{k' d(\cos \varphi)}{\sqrt{k^2 + k'^2 \cos^2 \varphi}} = -\left[\ln\left(k' \cos \varphi + \sqrt{k^2 + k'^2 \cos^2 \varphi}\right)\right]_0^{1/2\pi} =$$

$$= \ln \frac{1 + k'}{k} = \ln \frac{2}{k} + O(k)$$

и

$$K' = \ln \frac{4}{k} + O(k).$$

Аналогично при малых k

$$E' = \int_0^{1/2\pi} \Delta'(\varphi)\, d\varphi \doteqdot \int_0^{1/2\pi} \cos \varphi\, d\varphi = 1$$

и

$$E = \int_0^{1/2\pi} \Delta(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\pi + O(k^2).$$

25.14. Приведение интегралов, содержащих многочлен третьей степени. Если

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad X^2 = (x - a)(b - x)(c - x),$$

то при помощи подстановки $x - a = \xi^2$ приходим к интегралу

$$t = \int \frac{2d\xi}{[(b - a - \xi^2)(c - a - \xi^2)]^{1/2}}.$$

В зависимости от знаков $b - a$ и $c - a$ интеграл имеет тот или иной стандартный вид. Такой вид интегралов более полезен в общем случае, чем вид, принятый Вейерштрассом, который брал в качестве стандартной функции

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum\sum{}' \left[\frac{1}{(u - m\omega - n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}\right].$$

Она удовлетворяет уравнению

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

где g_2 и g_3 — известные функции ω и ω'. Эта функция обладает тем свойством, что при малых u

$$\wp(u) - \frac{1}{u^2} = O(u^2).$$

Если бы Абель был жив, то он, вероятно, отметил бы, что это свойство соответствует выбору в качестве основной тригонометрической функции $\operatorname{cosec}^2 x - \frac{1}{3}$.

Квадраты каждой из функций sn, cn и dn, их обратные величины, а также отношения функций представляют собой функции, имеющие только полюсы второго порядка; их периоды $2K$ и $2iK'$. Следовательно, эти функции можно использовать так же, как и функцию $\wp(u)$ в методе Вейерштрасса.

25.15. Изменение модуля; преобразование Ландена. Это важное преобразование выражается наиболее симметрично, если рассмотреть интеграл

$$I = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{1/2}} = \int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(a^2+b^2u^2)}} \quad (u = \operatorname{tg}\varphi), \tag{1}$$

где $a \geqslant b > 0$. Положим

$$u = \frac{v}{A - Bv^2}. \tag{2}$$

Тогда

$$I = \int_0^{v} \frac{(A+Bv^2)\,dv}{\{[(A-Bv^2)^2+v^2][a^2(A-Bv^2)^2+b^2v^2]\}^{1/2}}. \tag{3}$$

Соответствующим выбором A и B можно добиться того, что второй квадратный корень в знаменателе будет пропорционален числителю. Указанное преобразование накладывает только одно условие и можно добавить другое условие: первый множитель знаменателя обращается в нуль при $v^2 = -1$. В результате получится новый интеграл такого же вида, как интеграл по u. Условия имеют вид

$$(A+B)^2 = 1, \quad 4AB = b^2/a^2, \tag{4}$$

и в качестве A и B нужно принять $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - b^2/a^2}$. Тогда

$$I = \int_0^{v} \frac{dv}{[(1+v^2)(d^2A^2 + a^2B^2v^2)]^{1/2}}, \tag{5}$$

и

$$a^2 = (A+B)^2 a^2, \quad b^2 = 4ABa^2.$$

Таким образом,

$$\int_0^v \frac{dv}{[(1+v^2)(\alpha^2+\beta^2 v^2)]^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{du}{\left\{(1+u^2)\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta u^2\right]\right\}^{1/2}} \tag{6}$$

при

$$v = \frac{\alpha+\beta}{2\beta u}\left[\left(1+\frac{4\alpha\beta u^2}{(\alpha+\beta)^2}\right)^{1/2}-1\right], \tag{7}$$

или

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi+\alpha\beta\sin^2\varphi\right]^{1/2}} \tag{8}$$

при

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\psi}{\alpha-\beta\operatorname{tg}^2\psi}. \tag{9}$$

Если $\psi = \frac{1}{2}\pi$, то $\varphi = \pi$ и получается простая связь между полными эллиптическими интегралами. Если обозначить интегралы через t, то получим

$$\sin\psi = \operatorname{sn}\left\{\alpha t\left|\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}\right.\right\}, \quad \sin\varphi = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right.\right) \tag{10}$$

и формулу (9) для соответствующих функций sc.

В (8) постоянные α и β заменяются арифметическими и геометрическими средними. Так, при $\alpha = 0{,}9$ и $\beta = 0{,}1$ арифметическое и геометрическое средние соответственно равны 0,5 и 0,3. Повторяя преобразование, получаем 0,40 и 0,387. Поэтому при последовательном использовании таких преобразований мы можем сколь угодно приблизить эллиптический интеграл линейной функцией нового аргумента.

Полные интегралы вида (8) симметричны по α и β. Но имеем

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{d\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}} = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\psi}{[\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\psi]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}K\left\{\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}\right\}, \tag{11}$$

где симметрия уже не очевидна. Однако выражение (11) равно также

$$\frac{2}{\alpha+\beta}K\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right), \tag{12}$$

где симметрия очевидна, так как K — четная функция k.

Аналогично можно рассмотреть эллиптический интеграл второго рода. При помощи того же преобразования получим

$$J=\int_0^{\varphi}\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi+\alpha\beta\sin^2\varphi\right]^{1/2}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2\int_0^{\psi}\frac{(\alpha\cos^2\psi+\beta\sin^2\psi)^2}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}}\,d\psi. \qquad (13)$$

Имеем

$$\frac{d}{d\psi}\frac{\cos\psi\sin\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}}=\frac{\alpha^2\cos^4\psi-\beta^2\sin^4\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}},$$

$$(\alpha\cos^2\psi+\beta\sin^2\psi)^2=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}(\alpha^2\cos^4\psi-\beta^2\sin^4\psi)+$$

$$+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)+\frac{2}{(\alpha+\beta)^2}(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^2.$$

Простейший путь определения коэффициентов состоит в том, чтобы подставить $\cos^2\psi+\sin^2\psi$ во второй член правой части и приравнять коэффициенты. Тогда имеем

$$J=-\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)\left[\frac{\cos\psi\sin\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2)^{1/2}}\right]_0^{\psi}+$$

$$+\alpha\beta\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}}+\int_0^{\psi}(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}\,d\psi. \qquad (14)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\int_0^{\psi}(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}\,d\psi=\int_0^{\varphi}\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi+\alpha\beta\sin^2\varphi\right]^{1/2}d\varphi-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\beta\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi+\alpha\beta\sin^2\varphi\right]^{1/2}}+$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)\frac{\cos\psi\sin\psi}{(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}}. \qquad (15)$$

Эквивалентные соотношения были найдены Ланденом в 1775 г.

Для полных интегралов имеем

$$\int_0^{1/2\pi}(\alpha^2\cos^2\psi+\beta^2\sin^2\psi)^{1/2}\,d\psi=2\int_0^{1/2\pi}\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi+\alpha\beta\sin^2\varphi\right]^{1/2}d\varphi-$$

$$-\alpha\beta\int_0^{1/2\pi}\frac{d\varphi}{\left[\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2\cos^2\varphi+\alpha\beta\sin^2\varphi\right]^{1/2}}. \qquad (16)$$

Эти соотношения использовал Лежандр при вычислении эллиптических интегралов.

ПРИМЕРЫ

1. Докажите, что $\operatorname{sn}(K/2) = (\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k})/k\sqrt{2}$, и найдите, при каких значениях z функция $\operatorname{sn} z$ равна выражениям, получающимся из правой части переменой знака корней (воспользуйтесь тем, что $\operatorname{cn} K = 0$).

2. Докажите, что $\operatorname{sn}(iK'/2) = i/\sqrt{k}$, и найдите, при каких значениях z $\operatorname{sn} z = 1/\sqrt{K}$.

3. Полагая $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 7x^2 + 10}}$, выразите x как однозначную функцию u.

4. Выразите решение уравнения движения маятника

$$\theta^2 = \theta_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$

через эллиптические функции.

5. Докажите, что

$$k \operatorname{sn} t = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=-n}^{m}\sum_{\nu=-n}^{n}\left[\frac{1}{t + 4\mu K + (2\nu - 1)iK'} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t + (4\mu + 2)K + (2\nu - 1)iK'}\right],$$

$$k \operatorname{cn} t = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=-m}^{m}\sum_{\nu=-n}^{n}\left\{\frac{2K'}{(t + 4\mu K + 4\nu iK')^2 + K'^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2K'}{[t + (4\mu + 2)K + 4\nu iK']^2 + K'^2}\right\},$$

$$\operatorname{dn} t = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=-m}^{m}\sum_{\nu=-n}^{n}\left\{\frac{2K'}{(t + 4\mu K + 4\nu iK')^2 + K'^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2K'}{[t + (4\mu + 2)K + 4\nu iK']^2 + K'^2}\right\}$$

и представьте двойные ряды в виде рядов по тригонометрическим функциям от $2Kt/\pi$ и гиперболическим функциям от $2K't/\pi$.

6. Докажите, что

$$k\int \operatorname{sn} u\, du = \ln\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\left[\frac{\pi}{4K}(u - iK')\right] + \ln\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\left[\frac{\pi}{4K}(u + iK')\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u} + \text{const}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenhead L.*, Phil. Trans., **A228**, 275–329 (1929).

2. *Jacobi C. G. J.*, Fundamenta Nova, 1829.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Изучение математической физики сильно затрудняется путаницей в обозначениях, в особенности перегрузкой некоторых букв и введением неудобных условий выбора знака. Единственный принцип, которому обычно следуют, заключается в согласии с „обычным употреблением". К сожалению, обычное употребление отнюдь не единообразно, и учащемуся приходится испытывать излишние трудности, чтобы привыкнуть к переходу от одних обозначений к другим в быстрой последовательности. Исследователи, работающие в смежных областях, также испытывают неудобства, обнаруживая, что обозначение, общепринятое в одной области, перегружено различными значениями в другой.

При выборе обозначений важно придерживаться следующих принципов:

1) Усложнения должны быть сведены к минимуму. Не следует вводить отрицательных знаков без особых на то оснований.

2) Физически разные случаи следует различать как таковые, а не маскировать в качестве условий. Попытки такой маскировки всегда приводят к добавочным трудностям, которых следовало бы избегать.

3) Если математическая теория находит приложения в нескольких областях, то следует выбирать такие обозначения, чтобы их можно было употреблять в этих областях без изменения, по возможности избегая употребления символов, уже использованных в другом смысле.

Особая трудность в обозначениях состоит в настоящее время в двусмысленном употреблении символов V и φ. Буква V используется не только для обозначения потенциальной энергии, которая является характеристикой системы в целом, но и для обозначения различных потенциальных функций, которые зависят от положения точки в системе. Эта буква употребляется также для обозначения характеристической функции Гамильтона, а в гидродинамике — компоненты скорости на большом расстоянии. В последнее время имеется тенденция обозначать потенциальные функции через φ, как это уже давно принято в гидродинамике. Это устранило бы большую часть затруднений.

Характеристическую функцию, имеющую довольно узкую область применения, можно было бы обозначить через A, а компоненту скорости, если принять тензорные обозначения, — через U_2. Тогда было бы легко избежать многозначного употребления V. Но теперь возникает то затруднение, что через φ обозначают также сферическую координату, соответствующую долготе, и имеется много задач о потенциалах, в которых требуется эта координата. Один из возможных выходов состоит в использовании большой буквы Φ для обозначения потенциала в таких задачах, но ее трудно писать. Другой выход состоит в том, чтобы найти иное обозначение для долготы и для второго угла Эйлера. Ламб использовал для этого обозначение ω в тех задачах, где существует потенциал скоростей, и φ — в противном случае. Неудобство ω как постоянного символа для этой цели очевидно. В свою очередь употребление φ неудобно тем, что в геодезии, использующей в значительной мере теорию гравитационного потенциала, φ используется для обозначения *широты*, тогда как долгота обозначается через λ. Такие же обозначения приняты и в метеорологии.

Кроме того, в классической гидродинамике часто приходится рассматривать потенциал скоростей и гравитационный потенциал в одной и той же задаче; следовательно, невозможно обозначить оба через φ. Если мы сохраним за φ его первоначальный смысл как потенциала скоростей, то уже по одной этой причине приходится искать другое обозначение для гравитационного потенциала. Общее правило, что потенциальные функции следует обозначать буквой φ, не вызывает сомнений. Особое обозначение гравитационного потенциала устранило бы затруднения в геодезии и динамической метеорологии, в которых не встречаются потенциалы скоростей, но не в задачах для электрических и гидродинамических систем с осевой симметрией, где все-таки требуется иное обозначение для азимутальной координаты. Геодезическая практика подсказывает в качестве подходящего символа λ. Есть некоторые соображения в пользу ψ; использование этого символа для функции, сопряженной с φ в двумерных задачах, не может привести к путанице, так как в этом случае соответствующий угол обычно обозначается через θ, а ψ использовалось в работах Рауса для обозначения второго угла Эйлера (для третьего можно было бы использовать χ). Замена ψ на φ была сделана только в работах последнего времени. Ламб в книге „Высшая механика“ пользовался обозначениями θ, ψ, χ. Любое изменение привело бы к изменению обозначений сферических координат, но тут, по-видимому, нет другого выхода, и фактически обозначения, принятые в математических руководствах, не используются во многих, а может быть, и в боль-

шинстве задач, где требуется задание положения точки на сфере.

В динамике обычно удобно пользоваться силовой функцией, равной работе, проведенной над системой при переводе ее из некоторого стандартного состояния в состояние в момент времени t. При этом устраняется отрицательный знак в выражениях для компонент обобщенной силы. Потенциальная энергия, равная силовой функции, взятой с обратным знаком, удобна в общей теории малых колебаний относительно положения равновесия, так как тогда она выражается положительно определенной квадратичной формой. В этом случае небольшое усложнение обозначений оправдано. Потенциальная энергия как таковая представляет интерес в связи с устойчивыми системами и приобретает решающее значение в теории электричества и термодинамике. При рассмотрении больших перемещений использование потенциальной энергии неудобно.

Поэтому определенные преимущества представляет использование как силовой функции, так и потенциальной энергии в наборе наших обозначений. В задачах теории электричества потенциальную энергию часто обозначают через W, тогда как V резервируется для обозначения потенциала. Но если этот последний обозначить через φ, то можно использовать V для обозначения потенциальной энергии и освободить W. Следовательно, положение таково, что нам требуются два символа для обозначения силовой функции и гравитационного потенциала, и в нашем распоряжении находятся U и W. В настоящее время для обозначения обеих этих величин широко используется U. Условимся обозначать через W силовую функцию, а через U — гравитационный потенциал.

Что касается выбора знаков, то из соображений формальной простоты стали общеприняты следующие соотношения:

Обобщенная сила

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}. \tag{1}$$

Напряженность электрического поля

$$X_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}. \tag{2}$$

Скорость жидкости

$$u_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Ускорение силы тяжести

$$\ddot{x}_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Первое соотношение возникает, если пользоваться потенциальной энергией. При использовании силовой функции знак будет обратным, что наиболее удобно, например, во всех задачах небесной механики. Есть определенные соображения в пользу второго подхода. В электростатике потенциальная энергия минимальна, и ее удобно выписывать, так как для двух зарядов она равна ee'/r в электростатических единицах. Приходится либо иметь отрицательный знак перед дифференцируемой функцией, либо вводить его после дифференцирования. Обычный потенциал равен изменению потенциальной энергии на единицу изменения заряда в рассматриваемой точке. Если бы мы вместо этого использовали силовую функцию на единицу заряда, то следовало бы ввести отрицательный знак в определение φ, что привело бы к изменению знаков всех измеренных разностей потенциалов. Поэтому запись (2) следует сохранить. Соотношение (4) было введено Ламбом по аналогии с (2). Но это ложная аналогия. Между гравитацией и электростатикой имеется глубокое физическое различие: две массы притягиваются, два одноименных заряда отталкиваются, и различие знаков в некоторых местах неизбежно. Принятая Ламбом запись приводит к тому, что гравитационный потенциал оказывается всегда отрицательным и меняется знак в уравнении Пуассона, — слишком дорогая цена, которую приходится платить за столь легкую аналогию. Очевидный путь состоит здесь в том, чтобы обозначить силовую функцию на единицу массы через U и заменить (4) соотношением, принятым до предложения Ламба

$$\ddot{x}_i = + \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Отрицательный знак в (3) также был введен Ламбом. Эта форма никогда не употреблялась за пределами Англии, но некоторые английские авторы скопировали ее, основываясь как на авторитете Ламба, так и на уверенности, что эта форма принята во всей стране. Эта уверенность ошибочна. В Англии потенциал скоростей используют в основном исследователи, занимающиеся теорией крыла самолета, которые продолжали употреблять положительный знак, как в книге Глауерта.

Далее, книга Ламба рассматривается обычно как основное руководство также и за границей, но его выбор знака не принимается. В „Теории упругости“ Лява — столь же авторитетном руководстве — выбирается положительный знак в выражении для безвихревой части смещения. Поэтому отрицательный знак в (3) можно рассматривать как досадное и бесполезное усложнение. В результате все эти рассуждения о наиболее удобных выраже-

ниях показывают, что лучше всего принять соотношения в следующем виде:

$$Q_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} \text{ (общий случай)} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \text{ (малые колебания)}, \qquad (1')$$

$$X_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad (2')$$

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad (3')$$

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}. \qquad (4')$$

Различие знаков в (2′) и (3′) мало существенно, так как электростатический и гидродинамический аспекты редко встречаются в одной и той же задаче. Тяготение же часто играет важную роль в гидродинамике, и удобно иметь одинаковые знаки в (3′) и (4′).

Следует также сказать несколько слов о постоянной γ. Она имеет различные значения в разных областях, и можно ввести специальные обозначения. Желательно не опускать ее в электростатике и магнетизме, даже если выбором единиц измерения ее численное значение сделано равным единице. Выбор единиц измерения не превращает ее в число, и неправильный анализ природы физических измерений приводит к утверждению, которое до сих пор встречается в учебниках для математиков, что отношение электростатических и электромагнитных единиц равно скорости света. Кроме того, теоретическая абсолютная электромагнитная система единиц никогда не употребляется, а в практических системах единиц численные значения этих постоянных весьма далеки от единицы. Эти постоянные можно опускать только в том случае, когда обучение электромагнитной теории совершенно не связано с приложениями к конкретным системам.

В „Небесной механике“ Тиссерана и во многих других книгах на ту же тему, где большей частью используется закон тяготения, постоянная обозначается через f (прямое или курсивное). По-видимому, против этого обозначения нечего возразить. Высказывалось опасение, что его можно принять за обозначение функции, но один из авторов пользуется этим обозначением начиная с 1914 г. и ни разу не встретил случая, когда любую из рассматриваемых функций нельзя было обозначить той или иной буквой, кроме f. Предлагавшееся обозначение G, по-видимому, привело бы к большим затруднениям в устранении двусмысленности.

Можно сказать одинаково много как за, так и против предложенного Лоренцом и Хевисайдом выбора системы единиц,

имеющего целью включить множитель 4π в уравнении Пуассона в постоянную γ. Теорема Грина об эквивалентном слое устанавливает не что иное, как соотношение между значениями φ, и содержит 4π, так что нет способа устранить этот множитель в одном месте без того, чтобы он не появился в другом.

Принято несколько различных символов для обозначения того, что две величины различаются не очень сильно: O, $\sim$, $\doteq$ и $\div$. Первые два имеют точно определенный математический смысл. Но в физике часто нужно сказать без подробных вычислений, что две величины, по-видимому, различаются не более чем в 10 раз или, скажем, не более чем на 10 процентов. Для первого утверждения, которое обычно начинается как „a и b одного порядка величины“, мы предлагаем обозначение „$a \doteq b$“, а для второго, которое можно выразить как „a есть грубая оценка для b“ или „a приблизительно равно b“, — обозначение „$a \div b$“, выражающее несколько более точную оценку, чем $\doteq$, но менее точную, чем указание наибольших возможных пределов для разности между a и b. Интересующая нас точность приближений, естественно, зависит от задачи. Статистическая оценка $a = b \pm \sigma$ имеет смысл, определяемый в работах по теории вероятности, и не нуждается в изменениях.

УКАЗАТЕЛЬ

Абеля функции 311
Асимптотические разложения 43, 235
— формулы 273
— — гриновского типа 179
— — стоксовского типа 174, 212
Ai(x), Bi(x) *см.* Эйри интеграл

Бегущая волна 123
Бейтмана интеграл 279
Бесконечные определители 28
Бесселя уравнение 30, 80, 89, 102
— функции 160
— — ber, bei, ker, kei 183
— — высшего порядка 179
— — $I_n(x)$, $\mathrm{Kh}_n(x)$ 168
— — $J_{n+1/2}$ 182
— — контурные интегралы 160, 171
— — операционные представления 160
— — приложения 192
— — рекуррентные формулы 172
— — Y_n 164
Биаксиальная гармоника 271
Браун (Brown E. W.) 28
Бромвич (Bromwich T. J.) 135, 157
Бромвича интеграл 32

Ван дер Поль (B. van der Pol) 33
Ватсон (Watson G. W.) 98
Ватсона лемма 47
Вейерштрасса эллиптические функции 331
Взрывная волна сферическая 139
— — цилиндрическая 192
Вихревая линия 205
Волновое уравнение 93
Вронскиан 35, 181
Вырожденная гипергеометрическая функция 208
— — — в виде интегралов 211
— — — преобразование Уиттекера 223

Гармонический цуг волн 76
Гиперболические уравнения 96
Гольдштейн (Goldstein S.) 217
Грин (Green G.) 86
Грина функция 40, 115, 251
Групповая скорость 67

Даламбера решение 122
Дебай (Debye P.) 47, 51
Джеффрис (Jeffreys H.) 44, 86, 90
Джеффрис Б. (Jeffreys B.) 90
Дисперсия 66
— волн на воде 71
Дифракция 230
Дифференциальные уравнения 7
— — асимптотические решения 78
— — определяющее уравнение 18
— — особенности в бесконечности 16
— — особые точки 7, 12
— — регулярные особенности 14
— — рекуррентные соотношения 23
— — существование решения 8
$D_n(x)$ 236

Земли возраст 148
— магнетизм 260
— охлаждение 153
— фигура 265
Зональные гармоники 250, 270

Импульс 142
— преломление 77
— цилиндрический 192
Ингена — Хауша опыт 151
Интегральное уравнение 38

Каке (Caqué J.) 10
Квантовая механика, водородоподобный атом 226
— — вращение осей 271
— — линейный осциллятор 230
— — потенциальный барьер 90
Кельвин (Kelvin) 47, 58
Клеро формула 269
Координаты эллипсоида вращения 110, 111
Коши (Cauchy A. L.) 10
Криволинейные координаты 98

Лагерра многочлены 227
Ландена преобразование 332
Лапласа интеграл 276
— уравнение 93, 228
Лежандра уравнение 11, 22, 107
— функции 109, 242
— — асимптотика при больших n 284

Лежандра функции в виде интегралов 250, 274
— — присоединенные 250
— — рекуррентные формулы 260
— — связь с функциями Бесселя 272
— — явные выражения 258
Лиувилль (Liouville J.) 86
Лорана теорема 258
Ляме функции 112

Мак-Кулло формула 116
Матье уравнение 26, 28, 90, 105, 112
Маятник 302
— обращенный 30
Мелера интеграл 278
Метод вариации постоянных 36
Множители сходимости 49
Мультипольное излучение 290

Наискорейшего спуска метод 51, 237
$Hh_n(x)$ 233

Операторные методы 123, 136
Орбиты планет 302
Ортогональности соотношения 112, 254
Охлаждение шарика термометра 156
— океана 158

Параболические уравнения 97
— цилиндрические координаты 103, 229
— — — функция 229
Парсеваля теорема 257
Периодическое возмущение во внутренней точке 135
Пикар (Picard E.) 10
Потенциал во внешних точках 115, 252
— в полости 244
— диска 262
— неоднородной сферы 263
Преобразование рядов 34
Прилива уравнение 24
Пуанкаре (Poincaré H.) 45

Расчет движения планет 38

Седловые точки 53
Стационарной фазы метод 56
Степенные ряды 10
Стирлинга формула 58
Стокс (Stokes G. G.) 58, 65
Стоячая волна 125
Струна с сосредоточенными массами 195
Струна вибрирующая 120
Сферические волны 138
— полярные координаты 107
Сфероидальные координаты 106

Тепла источник линейный 205
— — периодический 157
Теплопроводность в сплошной среде 200
— уравнение 93, 97, 144
Тессеральные гармоники 280
Трансокеанский кабель 202
Тэта-функция 321

Уиттекер (Whittaker E. T.) 98

Фазовая скорость 66
Фробениуса метод 20
Фурье—Бесселя интеграл 187
— решение 149

Ханкеля функции 162, 186
Харди (Hardy G. H.) 85
Хевисайд (Heaviside O.) 151
Хилл (Hill G. W.) 26, 28

Центр масс 115
Цилиндрические координаты 101

Шлефли интегралы 162
Шредингера уравнение 28, 226
Штурма—Лиувилля метод 115

Эйлера—Маклорена формула 45
Эйри (Airey J. R.) 50
— интеграл 11, 59, 74
Эллиптические интегралы полные 330
— — стандартный вид 328
— уравнения 96
— функции 301
— — бесконечные произведения 319
— — вычеты 314
— — тригонометрические представления 315
— — формулы сложения 317
— цилиндрические координаты 104
Эрмита многочлены 232
— функция 229

Якоби (Jacobi C. G. J.) 80
— мнимое преобразование 325
— эллиптические функции 304

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА 5

ГЛАВА 16. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА 7

ГЛАВА 17. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ 43

ГЛАВА 18. УРАВНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА, ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ 93

ГЛАВА 19. ВОЛНЫ В ОДНОМ ИЗМЕРЕНИИ И ВОЛНЫ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ 120

ГЛАВА 20. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ОДНОМ И ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ 144

ГЛАВА 21. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ 160

ГЛАВА 22. ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ 192

ГЛАВА 23. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ 208

ГЛАВА 24. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ 242

ГЛАВА 25. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 301

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ 336

УКАЗАТЕЛЬ 342

Г. Джеффрис, Б. Свирлс

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ВЫП. 3.

Редактор Э. А. Медушевская

Художник Е. М. Золотарев Художественный редактор В. М. Варлашин

Технический редактор А. П. Кондюкова Корректор О. Ф. Иванова

Сдано в производство 6/II 1970 г. Подписано к печати 6/VIII 1970 г. Бумага тип. № 2 $60\times90^{1}/_{16}$=10,75 бум. л. 21,50 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 20,45. Изд. № 27/5571. Цена 2 р. Зак. 523

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29

Appg.